数学A

内容

１章　集合と場合の数

１節　集合と要素の個数

① 集合

☆集合

集合・・・条件のはっきりしたものの集まり

例：5 以下の自然数の集まり・・・１，２，３，４，５

要素・・・集合に入っているもの一つ一つ。

例：「5 以下の自然数の集まり」という集合の要素は「１，２，３，４，５」である。

わかりやすくするため、ある集合を文字で表す

例：「5 以下の自然数の集まり」を A とする。

⇒ A の要素は「１，２，３，４，５」である。

a が A の要素であるとき、「a は A に**属する**」という。また記号で $a \in A$ と書く。逆に、a が A の要素でないときは $a \notin A$ と書く。

例１　正の奇数全体の集合を A とするとき

$3 \in A$　$4 \notin A$　$5 \in A$

＊＊＊

集合の表現　集合を表すには次の２つの方法がある。

① $A=\{1,2,3,4,6,12\}$　　A の要素は１，２，３，４，６，１２

② $A=\{x \mid x は 12 の正の約数\}$

→｛　｝の中の意味は「x は 12 の正の約数」という条件を満たす x 全て、である。どちらも同じ集合を表している。

例２　次の集合を２つの表し方で書け

（１）５以上３５以下の偶数全体の集合 A

$A=\{6,8,10,\cdots,34\}$

$A=\{x \mid x は５以上３５以下の偶数\}$

（２）自然数全体の集合 B

$B=\{1,2,3,\cdots\}$

$A=\{x \mid x は自然数\}$

要素が多いとき、省略のため「・・・」を使うことがある。

＊＊＊

☆部分集合

部分集合・・・ある集合の一部分を要素としたもう一つの集合

例：$A=\{1,3,5\}$ は $B=\{1,2,3,4,5\}$ の部分集合

集合 A が集合 B の部分集合であるとき、以下の様に表す

$A \subset B$　または　$B \supset A$

例３

　$A=\{x\mid x$は４の倍数$\}$、$B=\{x\mid x$は２の倍数$\}$であるとき、６の倍数はすべて３の倍数でもあるから、

$$A\subset B$$

＊＊＊

集合Aと集合Bがまったく同じ集合のとき$A=B$と書く。

☆共通部分と和集合

　集合Aと集合Bの<u>どちらにも含まれる</u>要素を集めた集合を「AとBの共通部分」という。

また記号で

$$A\cap B \qquad \text{（「}A\text{かつ}B\text{」と読む。）}$$

と書く。

　集合Aと集合Bの<u>少なくとも一方に含まれる</u>要素を集めた集合を「AとBの和集合」という。

また記号で

$$A\cup B \qquad \text{（「}A\text{または}B\text{」と読む。）}$$

と書く。

　例：$A=\{2,4,6,8\}$は$B=\{2,3,4\}$のとき

$$A\cap B=\{2,4\}\text{、} \qquad A\cup B=\{2,3,4,6,8\}$$

＊＊＊

☆空集合

　要素が何もない集合を「空集合」といい、ϕで表す。

例４　集合$\{2,3\}$の部分集合は

ϕ、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{2,3\}$である。（空集合、その集合自身を含む）

＊＊＊

☆補集合

　考えているすべての要素をもつ集合を「全体集合」といい、Uで表す。Uの部分集合Aを考える。このときUの要素の中でAに入らないものを「Aの補集合」といい、

$$\overline{A} \qquad \text{（「}A\text{でない」と読む。）}$$

と表わす。

例５　$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$が全体集合で$A=\{1,2,3,4\}$のとき

$$\overline{A}=\{5,6,7,8,9\}$$

＊＊＊

２つの集合A、Bについて以下の法則が成り立つ。

ド・モルガンの法則

$$\boxed{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\text{、}\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$$

② 集合の要素の数

集合 A の要素の数を

$$n(A)$$ （集合 A の要素の個数）

で表す。

例６

$A=\{2,4,6,8,10\}$ であるとき、$n(A)=5$ である。

2 つの集合 A 、B があるとき、$A\cup B$ の要素の数を数える。手順を示すと

①A の要素の数、$n(A)$ を求める。

②B の要素の数、$n(B)$ を求める。

③$n(A)+n(B)$ を計算する。

④集合 A 、B に共通部分があるときは、2 回数えた要素があるから、その分 $n(A\cap B)$ を引く。

つまり、$n(A\cup B)$ は

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

で求まる。

全体集合 U があり、その部分集合を A とすると、補集合 $\overline{A}$ の数は

$$n\left(\overline{A}\right)=n(U)-n(A)$$

Ａでない部分の数＝（全体の数）－（Ａである部分の数）

となる。

和集合・補集合の要素の個数

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n\left(\overline{A}\right)=n(U)-n(A)$$

＊＊＊

例題１　50 以下の自然数のうち、2 の倍数または 3 の倍数である数の個数を求めよ。

公式　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$　を使って求める。

50 以下の自然数のうち

2 の倍数の集合を A

3 の倍数の集合を B

とする。$A\cap B$ は２の倍数でもあり、３の倍数でもある数になる。このような数は２と３の最小公倍数６の倍数になる。

A 、B 、$A\cap B$ の要素をそれぞれ書き出すと

$A=\{2,4,6,\cdots,50\}$　要素の個数は（５０÷２の商）＝２５

$B=\{3,6,9,\cdots,48\}$　要素の個数は（５０÷３の商）＝１６

$A\cap B=\{6,12,18,\cdots,48\}$　要素の個数は（５０÷６の商）＝８

であるから

$n(A)=25$、$n(B)=16$、$n(A\cap B)=8$

求めるのは$A\cap B$の要素の個数だから

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より

$$n(A\cup B)=25+16-8$$
$$=33$$

答えは　３３個

＊＊＊

<u>例題２</u>　４０人のグループのうち、カラオケが好きな生徒は３１人、ボーリングが好きな生徒は２８人、どちらも好きな生徒は２２人である。このとき、次の人数を求めよ。

（１）どちらも好きでない生徒（２）カラオケは好きでないが、ボーリングは好きな生徒

$\boxed{\text{解}}$　グループ全体の集合をUとし、カラオケが好きな人の集合をA、ボーリングが好きな人をBとする。

$n(A)=31$、$n(B)=28$、$n(A\cap B)=22$

となる。

（１）どちらも好きでない集合は$\overline{A}\cap\overline{B}$である。ド・モルガンの法則より

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$であるから$n\left(\overline{A\cup B}\right)$を求めればよい。

$$\begin{aligned}n\left(\overline{A\cup B}\right)&=n(U)-n(A\cup B)\\&=n(U)-\{\,n(A)+n(B)-n(A\cap B)\,\}\\&=40-\{31+28-22\}\\&=3\end{aligned}$$

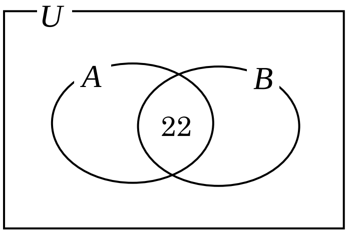
答　３人

（２）カラオケ好きで、ボーリング好きではない生徒の集合は$\overline{A}\cap B$である。ボーリング好きの生徒の数から両方好きな生徒の数を引けばよい。

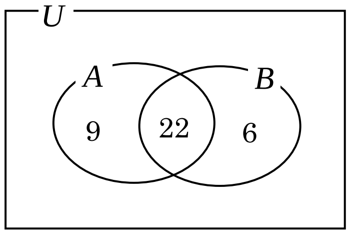
$$\begin{aligned}n\left(\overline{A}\cap B\right)&=n(B)-n(A\cap B)\\&=28-22=6\end{aligned}$$

答　６人

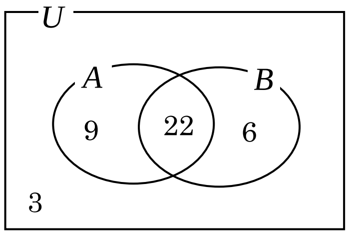
図を使った解き方



両方好きな人が 22 人



カラオケが好きな生徒は３１人だから、カラオケだけ好きな生徒は 31－22＝9 人。ボーリングも同様。



全部合わせて 40 人だから、40－(9+22+6)=3 人

２節　場合の数

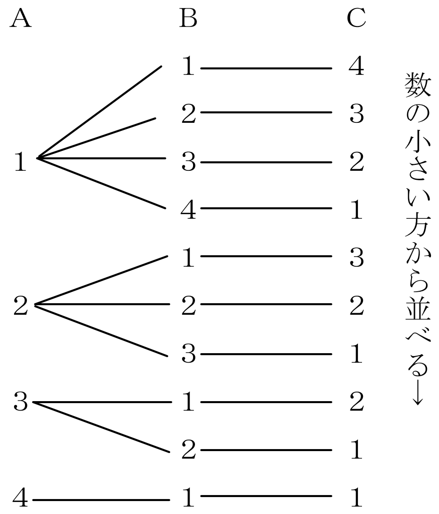
①　場合の数

☆個数の数え方

　３個のさいころＡ，Ｂ，Ｃを投げるとき、目の和が６になる場合は何通りあるか調べてみる。

　２－２－２の様に思いついたものから書き並べても良いが、重複や数えもれを防ぐために、順序よく数えるのが良い。

　例えば小さい目から順に書き出すと右のように書くことができる。この図より目の和が６になるのは１０通りあることがわかる。



　右のような図は

樹形図

という。

　場合の数の数え方

重複、数えもれ、を防ぐために
「樹形図」を使う。

＊＊＊

☆和の法則

　あるチームには男性が４人、女性が５人いる。この中から１人のリーダーを選ぶとき、選び方は

　　　　$4+5=9$　通り

ある。複数のグループから１つを選ぶ場合の数は、各グループの中から選ぶ場合の数を足し合わせればよい。

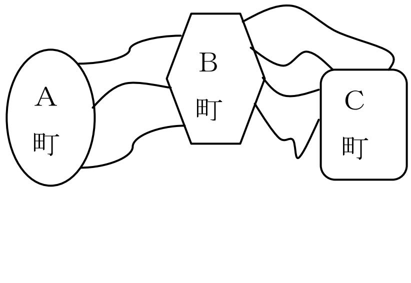
☆積の法則

　ある服売り場には、シャツが a、b、c の３種類、ズボンが p、q の２種類ある。シャツとズボンを１つずつ選ぶとき、その選び方は

　　　　$3\times2=6$　通り

である。複数のグループから１つずつ選ぶ場合の数は、各グループの中から選ぶ場合の数を掛ければよい。

例１　右の図のように、Ａ町からＢ町に行く道が３本、Ｂ町からＣ町に行く道が４本ある。Ａ町からＢ町を通ってＣ町に行く行き方は何通りあるか。



　Ａ町からＢ町に行く行き方は３通り、Ｂ町からＣ町へ行く行き方は４通り。積の法則より

　　　　$3\times4=12$　通り

となる。

＊＊＊

例題１　１０８の正の約数は何個あるか。

解　まず１０８を素因数分解すると

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

と表わすことができる。１０８の約数は2^2の約数と、3^3の約数を掛けたものである。

2^3の約数は

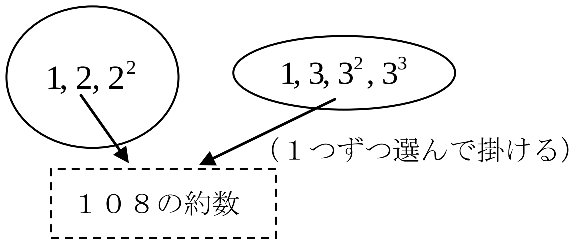
$$1, 2, 2^2$$

の３個。3^3の約数は

$$1, 3, 3^2, 3^3$$

４個であるから、積の法則より。

$$3 \times 4 = 12 \quad (\text{個})$$



＊＊＊

② 順列

$\boxed{A}$、$\boxed{B}$、$\boxed{C}$、$\boxed{D}$の文字が付いた４枚のカードがある。４枚のうち２枚を取り出し、１列に並べるとき、並べ方は何通りあるだろうか。

１番目のカードを$\boxed{A}$にすると、２番目は残り３枚のカードから選ぶことになるから３通りの選び方がある。同様に一番目のカードを$\boxed{B}$、$\boxed{C}$、$\boxed{D}$にしたときもそれぞれ３通りあるから、並べ方は全部で

３×４＝１２　（通り）

となる。

＊＊＊

いくつかのものを取り出して、順番に並べたものを**「順列」**という。

n個の異なるものの中からr個とった順列

といい。

$${}_n\mathrm{P}_r \qquad \text{（エヌ　ピー　アール、と読む）}$$

と表わす。

上記の「４枚のカードから２枚取り出して並べる順列」の総数は、${}_4\mathrm{P}_2$と表わせる。

n枚のカードの中から、r個取って並べるとき、

・１番目のカードの選び方はn通り

・２番目のカードの選び方は$n-1$通り

・３番目のカードの選び方は$n-2$通り

↓

・r番目のカードの選び方は$n-(r-1)$通り

となる。積の法則より

$${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{個}}$$

例２　${}_6\mathrm{P}_2 = 6\cdot 5 = 30$、　${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

${}_n\mathrm{P}_r$ は n から１ずつ減らした数を r 個かけた数である。

$$\underset{\boxed{6\text{から}}}{{}_6\mathrm{P}_3} = \underbrace{6\cdot5\cdot4}_{3\text{個}} = 120$$

＊＊＊

「4×3×2×1」のように１からある数までの整数の積を**「階乗」**といい

$$4! = 4\times3\times2\times1$$

と表わす。

$1! = 1$
$2! = 2\times1 = 2$
$3! = 3\times2\times1 = 6$
$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

ある整数を n としたとき、n の階乗は

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

である。

＊＊＊

順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ は階乗の記号を用いて表すことができる。例えば

$${}_6\mathrm{P}_4 = 6\cdot5\cdot4\cdot3$$

であるが、６の階乗に近い形をしている。$6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ であるから
$6!$ を $2\cdot1$ で割れば ${}_6\mathrm{P}_4$ になると考えて、

$${}_6\mathrm{P}_4 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2} = \frac{6!}{2!}$$

分母の $2!$ はＰの両側の差６－４＝２からきている。一般に、$0 < r < n$ のとき、${}_n\mathrm{P}_r$ は

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

となる。${}_n\mathrm{P}_n = n!$ であるから、

$$0! = 1$$

と定めると $r = n$ でも上の式は成り立つ。また、${}_n\mathrm{P}_0 = 1$ となる。

＊＊＊

例題２　１１人の中から、リレー選手の第１走者、第２走者、第３走者までの３人を選ぶ選び方は何通りあるか。

解　１１人の中から３人選び、順に並べると考えられるから

$${}_{11}\mathrm{P}_3 = 11\cdot10\cdot9 = 990 \quad （通り）$$

＊＊＊

例題３　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの６人を一列に並べる順列の中でＡとＢが隣り合うようなものは何通りあるか。

$\boxed{解}$　すべての並べ方を樹形図で書いて数えるのは非常に大変なので、図を書いて考える。

左から文字を並べるとすると、ＡとＢが隣り合う場合は

・・・ＡＢ・・・　と　・・・ＢＡ・・・

の２通り（${}_2P_2 = 2!$　通り）である。

ＡとＢが「隣り合う」ということは、ＡとＢがくっついていると考えることができる。

ＡとＢを１つのかたまりと考えると

$\boxed{\text{ＡＢ}}$，Ｃ，Ｄ，Ｅ

の４人を並べる順列と

$\boxed{\text{ＢＡ}}$，Ｃ，Ｄ，Ｅ

の４人を並べる順列を考えればよい。

それぞれ${}_4P_4 = 4!$通りの並べ方があるから、積の法則より

$4! \times 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 48$　（通り）

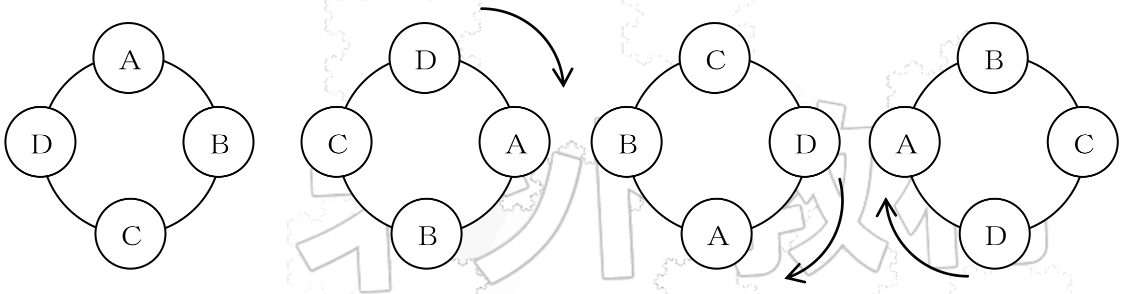
＊＊＊

☆円順列

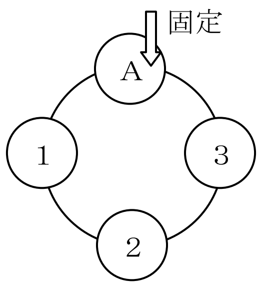
Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４人が手をつないで輪を作るとき、何通りの輪の作り方があるか考えよう。

図を書いて調べようとすると、同じ並び方を何回か数えてしまう危険がある。

例えば



はすべて同じ並び方である。（Ａから見て向いがＣ。右がＤで、左がＢ。）重複を避けるためにＡを固定する。場所に番号を付ければ



右	→	1
向い	→	2
左	→	3

１，２，３に残りの３人を並べると考えれば

${}_3P_3 = 3! = 6$　（通り）

同様に考えて、５人で輪を作る場合は${}_4P_4 = 4!$、６人なら${}_5P_5 = 5!$、・・・、となる。

いくつかのものを円形に並べたものを「**円順列**」という。

円順列の総数

n個のものの円順列の総数は　$(n-1)!$

＊＊＊

☆重複順列

４つの数字１，２，３，４を用いてできる３桁の整数は何個あるかを考えてみよう。ただし、数字１，２，３，４は何回でも使えるとする。

まず、一の位の数字を　１，２，３，４　から選ぶのは

４通り

同様に、十の位の数字を　１，２，３，４　から選ぶのは

４通り

同様に、百の位の数字を　１，２，３，４　から選ぶのは

４通り

積の法則より

例　？？３　←　一の位を３
　　？４３　←　十の位を４
　　３４３　←　百の位を３

$$\underbrace{4\times4\times4}_{3\text{個}}=4^3=64 \quad (\text{個})$$

異なるもから、くり返し（重複）を許して取り出して並べたものを**「重複順列」**という。

重複順列

n 個のものから r 個とった重複順列の総数は

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{個}}=n^r$$

例題３　１枚の硬貨を３回投げるとき、表と裏の出方は全部で何通りか

$\boxed{\text{解}}$　コインの表裏は　２個のもの（２種類の目）

３回投げるは　３個とる

と考えれば、２個のものから３個とる重複順列であるから

$$2^3=8 \quad (\text{通り})$$

＊＊＊

③ 組合せ

Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４人から、２人選んで漫才コンビを作るとき、漫才コンビの作り方は

Ａ－Ｂ、　Ａ－Ｃ、　Ａ－Ｄ、　Ｂ－Ｃ、　Ｂ－Ｄ、　Ｃ－Ｄ

の６通りである。コンビを作るとき、順序は関係ないので　Ａ－ＢとＢ－Ａは同じである。

並べる順序を考えないで、いくつかのものを取り出したものを**「組合せ」**という。

n 個の異なるものの中から r 個とった組合せを

$${}_n\mathrm{C}_r \qquad (\text{エヌ　シー　アール、と読む})$$

と表わす。

上記の「４人から２人取り出す組み合わせ」の総数は、${}_4\mathrm{C}_2$ と表わせる。つまり

$${}_4\mathrm{C}_2=6$$

となる。

順列と組合せの違いを調べてみよう。

Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４人から、２人選ぶだけの場合を考える。例えばＡとＢを選べば

Ａ－Ｂ

の１通りである。ＡとＢの並びを考えると

$$1\times 2!=2 \quad （通り）$$

となる。どのような２人を選んでも$2!$倍だけ総数が増えるから、${}_4C_2$と${}_4P_2$の間には

$${}_4P_2={}_4C_2\times 2!$$

の関係がある。よって

$${}_4C_2=\frac{{}_4P_2}{2!}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6 \quad （通り）$$

となる。

組合せ

$$\boxed{{}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}}$$

また

$${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

であるから

$$\boxed{{}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

<u>例４</u>

$${}_5C_2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(2\cdot 1)(3\cdot 2\cdot 1)}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$$

$${}_6C_3=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)(3\cdot 2\cdot 1)}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$$

必ず約分されることを考えると

$${}_5C_2=\frac{\overbrace{5\cdot 4}^{\text{上から2個}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{下から2個}}}=10 \qquad {}_6C_3=\frac{\overbrace{6\cdot 5\cdot 4}^{\text{上から3個}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{\text{下から3個}}}=20$$

のように計算すればよい。

＊＊＊

<u>例５</u>　10人の中から3人の代表を選ぶ時、選び方は何通りあるか。

２０から3選ぶから

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120 \quad （通り）$$

＊＊＊

例題４　男子８人、女子５人の中から、男子３人、女子２人の合計５人の代表を選ぶ選び方は何通りあるか。

解　男子８人から３人を選ぶのは${}_8C_3$通り、女子５人から２人を選ぶのは${}_5C_2$通り、男子の選び方１つ１つに、女子の選び方${}_5C_2$があるから、積の法則より

$$ {}_8C_3 \times {}_5C_2 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 560 \quad \text{（通り）} $$

＊＊＊

例題５　A，B，C，D，E，F，Gの７人から４人を選ぶとき、AとBがともに含まれるような選び方は何通りあるか。

解　AとBは必ず選ばれるから、残りのC，D，E，F，Gの５人から２人選ぶ選び方を求めればよい。

よって、$$ {}_5C_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10 \quad \text{（通り）} $$

$$ \underset{\uparrow \atop \text{決まり}}{\text{A，B}}，\underbrace{\text{C，D，E，F，G}}_{\text{この中から２人選ぶ}} $$

＊＊＊

５個の文字 a，b，c，d，e から３個取る組合せは

$$ {}_5C_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10 $$

また、５個から３個取ることは、取らない２個を決める組合せとも考えられるので

$$ {}_5C_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10 $$

つまり、${}_5C_3 = {}_5C_2$ となる。

組合せでは、次の等式が成り立つ

$$ \boxed{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}} $$

$r=0$、$r=n$ とおくと、それぞれ

$$ {}_nC_0 = {}_nC_n、\ {}_nC_n = {}_nC_0 $$

${}_nC_n = 1$ であるから、

$$ {}_nC_0 = 1 $$

とする。

例６　$$ {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\cdot9}{2\cdot1} = 45 $$　（rの小さい方が計算が楽！）

＊＊＊

４　組合せの応用

☆組分け

例７　a，b，c，d，e，f の６人の生徒を、４人と２人の２組に分けるとき、分け方は何通りあるか。

　まず、４人の組を決めるとすると、${}_6C_4 = 15$（通り）になる。次に２人の組を決めるが、もうすでに残りは

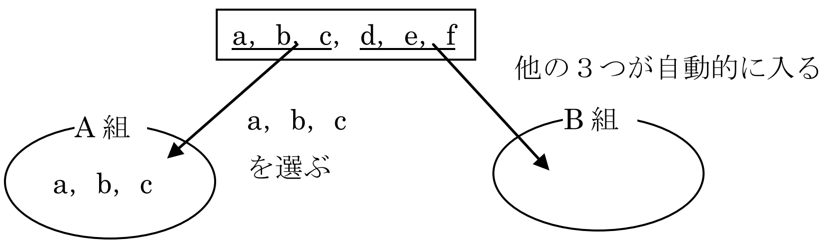
$$ \underbrace{\text{a，b，c，d，}}_{\text{４人組を決めると}}\underbrace{\text{e，f}}_{\text{２人組も決まる}} $$

二人なので１５通りとなる。

＊＊＊

<u>例８</u>　a，b，c，d，e，f の６人の生徒を、３人ずつ２組に分けるとき、分け方は全部で何通りあるか？

　仮に２つの組をＡ組、Ｂ組と名付ける。最初にＡ組を選ぶと、選び方は６人から３人選ぶので${}_6\mathrm{C}_3=20$（通り）。Ａ組を決めると、Ｂ組は自動的に決まる。



ただし、２０通りの中には

A		B
(a, b, c)	－	(d, e, f)
(d, e, f)	－	(a, b, c)

のように、組の名前が違うだけでメンバーは同じものがある。Ａ組Ｂ組という名前は仮に付けただけなので、名前を取ってしまえば二つの組み合わせは同じである。

　同じ組み合わせは2!（ABの並び）ずつあるので、すべての組み合わせは

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!}=\frac{20}{2!}=10 \quad （通り）$$

になる。

＊＊＊

<u>☆同じものを含む順列</u>

　７文字 a，a，a，a，b，b，c のすべてを１列に並べた順列を考える。

順列なので${}_7\mathrm{P}_7$を使って解きたいところだが、右のように並べた場合。

２つの a を入れ替えても、文字の並び方はかわらないので、

${}_7\mathrm{P}_7$では重複して数えてしまっている。

a　a　a　a　b　b　c

入れ替えても同じ

そこで、７個の場所にに７文字を入れていくと考えると、

まず、a４つが入る場所を７箇所から選ぶ。

$${}_7\mathrm{C}_4$$

$\boxed{a}\ \boxed{}\ \boxed{a}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{a}\ \boxed{a}$

次に、b２つが入る場所を残りの３箇所から２箇所選ぶ

$${}_3\mathrm{C}_2$$

$\boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{a}\ \boxed{}\ \boxed{b}\ \boxed{a}\ \boxed{a}$

最後に、c が入る場所を１箇所から１箇所選ぶ。

$${}_1\mathrm{C}_1$$

$\boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{a}\ \boxed{c}\ \boxed{b}\ \boxed{a}\ \boxed{a}$

積の法則より

$${}_7\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{3\cdot2}{2\cdot1}\times1=105 \quad （通り）$$

組み合わせを階乗を使って表せば

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}、\quad {}_1\mathrm{C}_1=\frac{1!}{1!0!}=1$$

$$ {}_7C_4 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{7!}{4!3!} \times \frac{3!}{2!1!} = \frac{7!}{4!2!1!} $$

n 個のもののうち、p 個は同じもの、q 個は別の同じもの、r 個はまた別の同じもの、であるとき、それら全部で n 個のものを使った順列は、以下のようになる。

同じものを含む順列

$$ \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし} \quad p+q+r=n $$

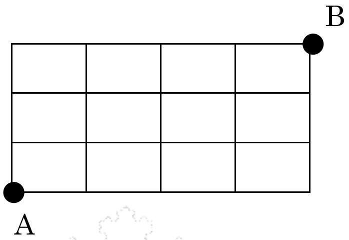
例９　dddeef の６文字すべてを並べてできる順列の総数を考える。

d が３個、e が２個、f が１個を並べるから

$$ \frac{6!}{3!2!1!} = 60 \quad \text{（通り）} \qquad \boxed{3+2+1=6} $$

＊＊＊

例題６　右の図のような道のある町がある。この町の A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路は何通りあるか。



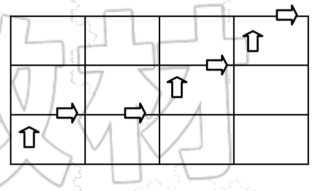
解　最短距離で B まで行くには、上に１マス進むもしくは右に１マス進むことを繰り返し行っていく。合計上に３回、右に４回進めば良いので

上　上　上　右　右　右　右

の順列を考えることと同じである。

同じものを含む順列（３個と４個の計７個）だから

$$ \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35 \quad \text{（通り）} $$



上　右　右　上　右　上　右

の場合

＊＊＊

⑤ 二項定理

☆パスカルの三角形

$(a+b)^2$、$(a+b)^3$、$(a+b)^4$ をそれぞれ展開してみると

$$ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 $$
$$ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 $$
$$ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 $$

のようになる、右辺各項の係数のみを取り出してみると

$(a+b)^2 \Rightarrow$ 　　1　2　1

$(a+b)^3 \Rightarrow$ 1　3　3　1

$(a+b)^4 \Rightarrow$ 1　4　6　4　1

のように並ぶ。この並びをよく見ると $(a+b)^3$ の係数は $(a+b)^2$ の係数のとなり同士の和になっている。

$(a+b)^2 \Rightarrow$ 　　1　2　1

$(a+b)^3 \Rightarrow$ 　1　3　3　1

$(a+b)^4 \Rightarrow$ 1　4　6　4　1

各場所に入る数は左上と右上の数の和

＊＊＊

$(a+b)^n$ の展開式の係数を次々と求めて並べたものを「パスカルの三角形」という（右図)。

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$

＊＊＊

☆二項定理

同類項をまとめずに $(a+b)^3$ を展開してみると

$$(a+b)^3=(a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b)(a+b)$$
$$=a\cdot a\cdot a+a\cdot a\cdot b+a\cdot b\cdot a+a\cdot b\cdot b+b\cdot a\cdot a+b\cdot a\cdot b+b\cdot b\cdot a+b\cdot b\cdot b$$

と８個の項が出てくる。

$(a+b)^3$ を $(a+b)(a+b)(a+b)$ と書き直すと。

$a\cdot a\cdot a$ は３つのカッコから b を０個取り出して掛けるから

${}_3C_0=1$（通り）

$a\cdot a\cdot b,\ \ a\cdot b\cdot a,\ \ b\cdot a\cdot a$ は３つのカッコから b を１個取り出して掛けるから

${}_3C_1=3$（通り）

$a\cdot b\cdot b,\ \ b\cdot a\cdot b,\ \ b\cdot b\cdot a$ は３つのカッコから b を２個取り出して掛けるから

${}_3C_2=3$（通り）

$b\cdot b\cdot b$ は３つのカッコから b を３個取り出して掛けるから

${}_3C_3=1$（通り）

となる。それぞれ同類項をまとめると

$$(a+b)^3={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2b+{}_3C_2ab^2+{}_3C_3b^3$$

となる。$(a+b)^4$ や $(a+b)^5$ なども同様に考えると、以下のような二項定理が成り立つ。

二項定理

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$\qquad {}_nC_ra^{a-r}b^r+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

$(a+b)^n$ を展開すると出てくる項は

$${}_nC_ra^{n-r}b^r \quad (r=0,1,2,\cdots,n) \quad \text{ただし}\ a^0=1、b^0=1$$

と表わされる。これを「**一般項**」という。また ${}_nC_r$ を「**二項係数**」という。

＊＊＊

例１１　二項定理に、$a=1$、$b=x$ を代入すると

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

となる。さらに$x=1$を代入すると

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$$

＊＊＊

例１１　$(x-2y)^5$の展開式におけるx^2y^3の係数を求めよ。

二項定理において$a \to x$、$b \to -2y$とした場合である。一般項は

$$ {}_5C_r(x)^{5-r}(-2y)^r \quad (r=0,1,\cdots,5)$$

となる。x^2y^3の項は、$r=3$の場合だから、$r=3$を代入して

$$ {}_5C_3(x)^2(-2y)^3 = 10\cdot 1^2\cdot(-2)^3x^2y^3 = -80x^2y^3$$

となる。よって、x^2y^3の係数は－８０である。

＊＊＊

２章　確率

１節　確率とその基本的性質

① 確率の意味

「確率」という言葉は日常的に良く使われる。ここでは数学における「確率」の意味をはっきりさせ、その性質を学ぶ。

☆試行と事象

試行・・・同じ条件のもとで何回も繰り返すことができ、その結果が偶然に決まる実験や観測。

例　さいころを振る。

事象・・・試行の結果起こることがら

例　（さいころを振って）３の目がでる。

一度コインを投げて表が出たとき、「このコインは必ず表が出る。」と思う人は少ない。何度もコインを投げれば、表と裏が大体同じ割合で出ることがわかる。

ある試行において、起こり得るすべての結果が同じ程度に起こると期待でき、これらの起こり得るすべての結果は**「同様に確からしい」**という。

平たくいうと
同様に確からしい・・・とは結果が偶然によってきまり、インチキがないということである。

☆事象の確率

ある試行において、起こり得るすべての結果が N 個あり、そのおのおのは同様に確からしいとする。この中で、事象 A の起こる場合の数が a 個のとき、

$\frac{a}{N}$ を事象 A の**「確率」**と定め、$P(A)$ で表す。

事象の確率

$$P(A)=\frac{a}{N}=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

例４　１個のさいころを投げるとき、１の目が出る事象 A の確率 $P(A)$ と、４以上の目が出る事象 B の確率 $P(B)$ を求めよ。

さいころは１～６の目が出るので「起こり得るすべての場合の数」は６である。事象 A の起こる場合の数は、１の目が出たときだけなので１である。

事象 B の起こる場合の数は、４，５，６の目が出たときなので３である。

よって

$$P(A)=\frac{1}{6}、\qquad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

＊＊＊

例５　１枚のコインを２回投げるとき、２回とも同じ面が出る事象 A の確率を求めてみよう。

一回目が表で、２回目が裏のときを（表，裏）と書くことにする。
「起こり得るすべての場合の数」は

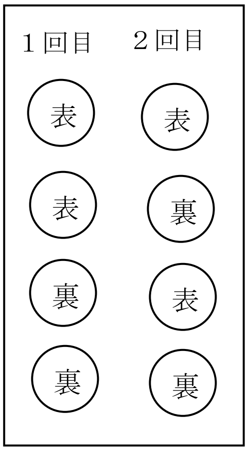
（表，表）、（表，裏）、（裏，表）、（裏，裏）

の４通りである。
「事象 A の起こる場合の数」は

（表，表）、（裏，裏）

の２通りである。
求める確率は

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$



＊＊＊

例題１　２個のさいころを同時に投げるとき、目の和が６になる確率を求めよ。

２つのさいころを A、B と名付ける。A、B 共に目の出方は６通りなので、２つのさいころを投げたときの目の出方は $6\times 6=36$（通り）ある。
A の目が１で、B の目が２のときを（１，２）と表わすと、目の和が６になるのは

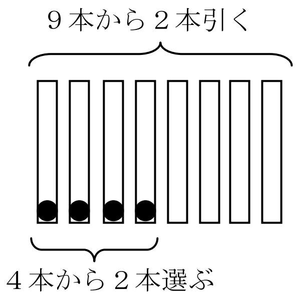
（１，５）、（２，４）、（３，３）、（４，２）、（５，１）

の６通りある。
したがって、求める確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

＊＊＊

例題２　９本のくじの中に当たりくじが４本ある。この中から同時に２本のくじを引くとき、２本とも当たりくじである確率を求めよ。

まず、１０本のくじから２本を引くときの、引き方は全部で ${}_9C_2$ 通り。そのうち、当たりを２本引くときの引き方は、当たりくじ４本から２本を引くので ${}_4C_2$ 通り。
したがって求める確率は　$\dfrac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$



＊＊＊

例６　黒球２個と白球４個が入っている袋から同時に２個の玉を取り出すとき、黒球１個、白球１個である確率を求めてみよう。

６つの球から２つ選ぶと考えると、２個の玉の取り出し方は全部で ${}_6C_2$ 通り。黒白１球ずつ取る取り方は、黒２個から１個選び、白４個から１個選ぶと考えて

$$\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{2\times 4}{15}=\frac{8}{15}$$

＊＊＊

例題３　ある５人が１列に並ぶとき、特定の２人が隣り合う確率を求めよ。

（問題注）「特定の２人が隣り合う」とは例えば５人をA、B、C、D、Eとすると、
特定の２人をAとBにして、A、B、C、D、Eを一列に並べたときに
AとBが隣り合う場合である。

５人の並び方は全部で${}_5P_5=5!$通り。

５人のうち特定の二人をAさんBさんとする。
AとBは隣り合う場合は、２人を１かたまりと考えると、
４つのかたまりの順列と考えられる。
４つの順列は${}_4P_4=4!$通り、ABの並びが${}_2P_2=2!$通りあるから

$4!\times 5!$　（通り）

$\boxed{\text{AB}}$，C，D，E，F
の５人を並べる順列と
$\boxed{\text{BA}}$，C，D，E，F
の５人を並べる順列。

したがって、求める確率は

$$\frac{4!\times 2!}{5!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{2}{5}$$

＊＊＊

② 確率の基本的性質

☆全事象・根元事象・空事象

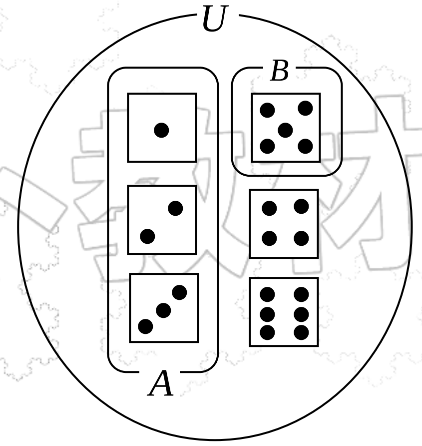
事象を取り扱うのに、集合の考え方を利用できる。
いま、さいころを振るとすると、結果として１～６の目が出る。
１の目が出ることを単に　１
同様に２の目が出ることを　２
と表わすと、この試行の結果全体は

$U=\{1,2,3,4,5,6\}$

のように表すことができる。
３以下の目が出る事象を　A
５の目が出る事象を　B
とすると

$A=\{1,2,3\}$　　$B=\{5\}$

と表わすことができ、A、BはUの部分集合になる。



＊＊＊

事象を集合で表したとき、上記のような全体集合にあたる事象を**「全事象」**という。
一つだけ要素をもつ事象を**「根元事象」**という。

例７　さいころを投げる試行の根元事象は

$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{4\}$、$\{5\}$、$\{6\}$

の６個である。

集合では何も要素を含まない「空集合」というものを考えた。事象においても、根元事象を１つも含まない事象を「空事象」といい、空集合をϕと表わす。

☆積事象・和事象・排反事象

事象において、集合の共通部分、和集合の考え方を利用できる。

空事象のϕの起こる確率$P(\phi)$は$a=0$として

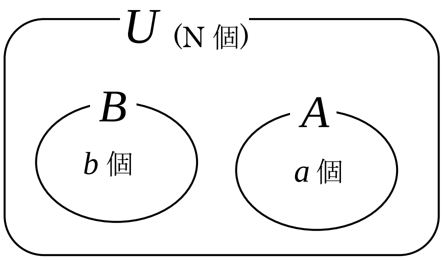
$$P(\phi)=\frac{0}{N}=0$$　空事象は絶対に起こらない

事象A（根元事象a個)、事象B（根元事象b個）が排反であるとき

$$A\cap B=\phi$$

であるから、$A\cup B$に含まれる根元事象は$a+b$個になる。

$$P(A\cup B)=\frac{a+b}{N}=\frac{a}{N}+\frac{b}{N}$$



$P(A)=\dfrac{a}{N}$、$P(B)=\dfrac{b}{N}$　であるから

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

となる。まとめると

確率の基本性質

（１）どのような事象Aでも　$0\leqq P(A)\leqq 1$

（２）全事象Uは　$P(U)=\dfrac{N}{N}=1$

（３）空事象ϕは　$P(\phi)=0$

（４）事象Aと事象Bが排反であるとき

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

☆確率の加法定理

事象Aと事象Bが排反であるとき　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　を確率の加法定理という。

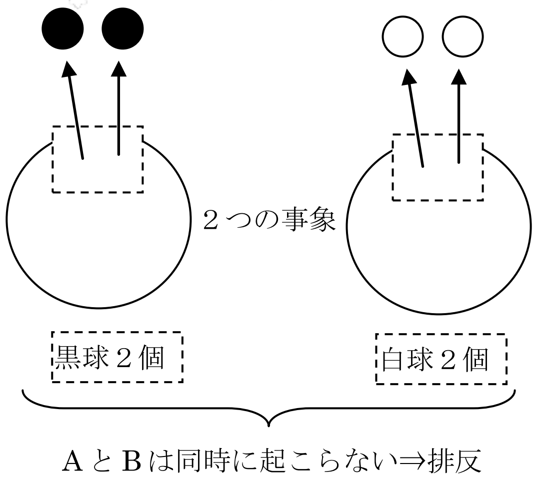
例題４　黒球３個と白球７個が入っている袋がある。袋から同時に２個の球を取り出すとき、取りだした２個が同じ色である確率を求めよ。

取り出した２個が両方黒球の場合を事象A、両方白球の場合を事象Bとする。このとき、２個とも同じ色であるという事象は$A\cup B$である。

事象A、Bの確率は

$$P(A)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{3}{45}$$

$$P(B)=\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{21}{45}$$



AとBは互いに排反であるから、確率の加法定理より

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$=\frac{3}{45}+\frac{21}{45}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

＊＊＊

☆和事象の確率

事象Aと事象Bが排反でないとき、$P(A\cup B)$を求めてみよう。

いま袋の中に、１～２０までの番号が付いた２０個の球がある。この袋から１個取り出すことを考える。

取り出した番号が偶数のとき　事象A

取り出した番号が３の倍数のとき　事象B

とする。

このとき、A と B は次のように表わされる。

$$A=\{\,2, 4, 6, \cdots, 20\,\}$$
$$B=\{\,3, 6, 9, \cdots, 18\,\}$$

A と B の両方に含まれる根元事象があるので、A と B は排反ではない。A と B の根元事象はそれぞれ 10 個、6 個である。ここで、$A\cup B$ に含まれる根元事象を $10+6$ 個とすると $A\cap B$ の部分を２回数えてしまうことになる。

$A\cap B$ は札が６の倍数(２と３の最小公倍数)のときだから

$$A\cap B=\{\,6, 12, 18\,\}$$

となり、根元事象は３個になる。結局、$A\cup B$ に含まれる根元事象は $10+6-3$ 個となる。

$A\cup B$ の確率は

$$P(A\cup B)=\frac{10+6-3}{20}=\frac{10}{20}+\frac{6}{20}-\frac{3}{20}$$

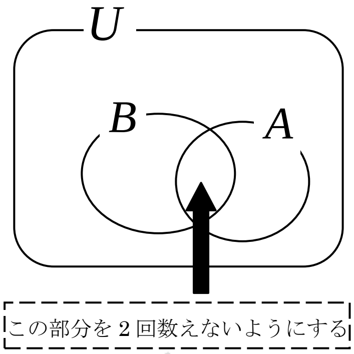
となる。ここで

$$P(A)=\frac{10}{20}、\quad P(B)=\frac{6}{20}、\quad P(A\cap B)=\frac{3}{20}$$

であるから、

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

となる。



一般に、事象 A、B について次の式に成り立つ。

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

加法定理は上記の式で $P(A\cap B)=0$ の場合である。（よって加法定理より重要）

＊＊＊

☆余事象とその確率

ある事象 A に対して、”A が起こらない”という事象を A の「**余事象**」といい、$\overline{A}$ で表す。これは集合でいうところの補集合にあたる。

例９

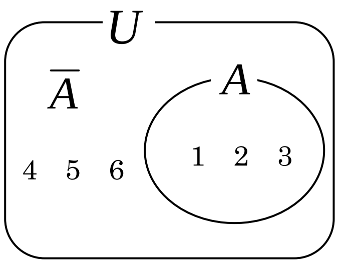
１個のさいころを投げるとき

３以下の目が出る事象を　A

とすると、余事象 $\overline{A}$ は

４以上の目が出る事象

である。



事象 A、$\overline{A}$ は互いに排反であるから加法定理

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

が成り立つ。$A\cup\overline{A}$ は全事象 U となるから、$P(A\cup\overline{A})=1$ である。これを加法定理に代入すると

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

移項して整理すると

余事象の確率

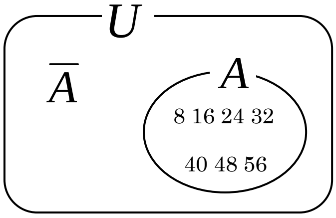
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

例１０　１～６０までの番号を１つずつ書いたくじがある。この中から１枚引くとき、８で割り切れない番号の札を引く確率を求めてみよう。

８で割り切れる番号のくじを引く　→　事象 A

とすれば

８で割り切れない番号のくじを引く　→　事象 $\overline{A}$



となる。$P(A) = \dfrac{7}{60}$ であるから（右図参照）

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{60} = \frac{53}{60}$$

となる。

いきなり８で割り切れない方を求めるのは難しいが、余事象を使えば楽に求まる。

＊＊＊

例題５　白球５個、赤球３個が入った袋から２個を同時に取り出すとき、少なくとも１個は白球が含まれている確率を求めよ

直接「少なくとも１個は白球」確率を求めるのは難しいので、余事象の性質を使って求める。

「少なくとも１個は白球」とは２個中「白球１個、赤球１個」、「２白球」の場合である。これに対する余事象は

２個とも赤球

である。

２個とも赤球の確率を求めれば、少なくとも１個は白球の確率が分かる。２個とも赤球の確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}$$

だから、少なくとも１本当たる確率は

$$1 - \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

となる。

「**少なくとも・・・**」ときたら**余事象**！

＊＊＊

２節　独立な試行と確率、期待値

① 独立な試行の確率

今までは、ある一つの試行について確率を求めてきた。ここでは複数の試行を考えた場合の確率を扱う。

いま２つの試行

硬貨を投げる　→　試行 T_1

さいころを投げる　→　試行 T_2

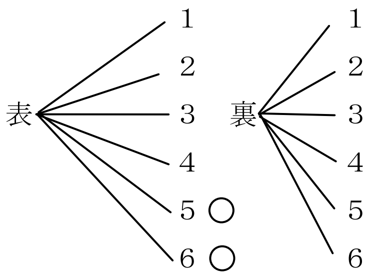
を考える。T_1を行った結果はT_2の結果に影響を与えることはない。逆に、T_2を行った結果もT_1の結果に影響を与えることはない。このとき、T_1とT_2は「**独立**」であるという。

硬貨を投げて、表が出たら、さいころを投げると１の目が出る。などということはない。

T_1とT_2が行われた時の確率を求めてみよう。

T_1の結果　表が出る　→　事象A

T_2の結果　５以上の目が出る　→　事象B



とすると、Aが起こりBが起こる確率pは

$$P=\frac{1\times 2}{2\times 6}$$

となる。分数の掛け算に分解すると

$$P=\frac{1\times 2}{2\times 6}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}$$

となる。$P(A)=\dfrac{1}{2}$、$P(B)=\dfrac{2}{6}$なので

$$P=P(A)\times P(B)$$

と表すことができる。

試行T_1、T_2が独立であるときT_1で事象Aが起こり、T_2で事象Bが起こる確率は

$$P=P(A)\times P(B)$$

<u>例２</u>　１個のさいころを２回続けて投げる時、１回目に偶数の目が出て、２回目に３以上の目が出る確率は

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

となる。

＊＊＊

３つ以上の試行において、全ての試行同士が独立であるならば、すべて試行でそれぞれの事象が起こる確率は掛け算によって求まる。

例えばT_1でAが起こり、T_2でBが起こり、T_3でCが起こる確率は

$$P(A)\times P(B)\times P(C)$$

となる。４つ以上の試行においても同様である。

＊＊＊

② 反復試行の確率

同じ試行を繰り返し行い、それらの試行が独立であるとき、これらの試行を「**反復試行**」という。

<u>例４</u>　さいころを３回投げることを考える。４の目が２回出る確率を求めよ。

３回さいころを投げる事象は独立なので

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

４以外が出る確率は　$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

となるが、４が２回出る場合は順序も考えると（４・４・他)、(４・他・４)、(他・４・４）の場合がある。３回のうち４を２つ選ぶと考えると

$_3C_2=3$　通り

□　□　□

三つの場所から２個選ぶ

だけある。２勝１敗になる事象をそれぞれ

A_1　（６６他)、A_2　（６他６)、　A_3（他６６）

とすると A_1、A_2、A_3 の確率はすべて $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$ である。

A_1、A_2、A_3 は排反であるから、求める確率は加法定理を用いて

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)={}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{5}{72}$$

となる。

反復試行の確率

ある試行で事象 A が起こる確率を p とする。$\overline{A}$ の確率を $q=1-p$ とすると、
この試行を n 回くり返したとき A が r 回起こる確率は

$${}_nC_r\,p^r q^{n-r}\qquad (r=0,1,2,3,\cdots,n)$$

となる。ただし、$p^0=1,\quad q^0=1$ とする。

<u>例５</u>　白球２個、赤球３個の入った袋がある。１個取り出して元に戻すことを４回くり返すとき、２回赤がでる確率を求めよ。

赤球が出る確率は $\frac{3}{5}$、白球が出る確率は $\frac{2}{5}$ よって

$${}_4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{4-2}=\frac{216}{625}$$

＊＊＊

<u>例題１</u>　さいころを４回投げるとき、２の目が３回以上出る確率を求めよ。

１の目が３回以上出るとは

・２の目がちょうど３回だけ出る　事象 A

・２の目が４回出る　事象 B

の２通りある。よって、求める確率は $P(A\cup B)$ になる。A と B は排反事象であるから、
確率の加法定理 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ によって求める。

$$P(A)={}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{20}{6^4}\qquad P(B)={}_4C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{6^4}$$

であるから。

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ より

$$P(A \cup B) = \frac{20}{6^4} + \frac{1}{6^4} = \frac{21}{6^4} = \frac{7}{432}$$

＊＊＊

③ 期待値

宝くじを買ったとき、当たりくじによってもらえる金額は当選番号を見るまで分からない。しかし、平均してもらえる金額（もらえるだろうと期待される金額）は求めることができる。

くじの賞金と本数が右の表で与えられている１００本のくじを考える。それぞれ当たる確率も求められる。くじを一本引いて得られる賞金の平均は、賞金総額を全本数で割ったものだから、

賞金	本数	確率
1000 円	20 本	$\frac{20}{100}$
500 円	30 本	$\frac{30}{100}$
100 円	50 本	$\frac{50}{100}$

$$\frac{(1000 \times 20) + (500 \times 30) + (100 \times 50)}{100} = 4000 \quad \text{円}$$

となる。左辺を分子のカッコごとに分けると

$$1000 \times \frac{20}{100} + 500 \times \frac{30}{100} + 100 \times \frac{50}{100} = 400 \quad \text{円}$$

つまり、このくじは平均的に４００円もらえるだろう、と期待できる。左辺は

(1000)×(1000 円の確率)＋(500)×(500 円の確率)＋(100)×(100 円の確率)

となっている。

ある試行を行った結果、得られる値 X が $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ を取るとする。それぞれ取る確率を $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ とするとき、

$$\boxed{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \cdots + x_n p_n}$$

得られる値×起きる確率
を全部足したもの

を X の「**期待値**」という。また、期待値のことを単に「平均値」と呼ぶ場合もある。

例７　さいころの目によって得られる得点が、が右の表で決まっている。

目の数	6	5，4，3	2，1
得点	１０	5	2
確率	$\frac{1}{6}$	$3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$	$2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

得られる値が同じものは、まとめて考える。

１回さいころを投げて進めるマスの期待値は

$$10 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} = \frac{29}{6}$$

＊＊＊

例題４　白球４個と黒球２個が入っている袋から、同時に２個の球を取り出すとき、そこに含まれる白球の個数の期待値を求めよ。

問題に表が与えられていないので、自分で作らなければならない。この試行の結果得られる白球の個数は０，１，２個の３通りである。それぞれ起こる確率を

p_0, p_1, p_2 とすると

$$p_0 = \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \Longrightarrow p_0 = \frac{1}{15}$$

黒玉を取る場合の数

全ての場合の数

同様に

$$p_1 = \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15}$$

$$p_2 = \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{6}{15}$$

これを用いて表を作成すると右図のようになる

白球の個数	0	1	2
確率	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

よって、求める期待値は

$$0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{6}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad \text{（個）}$$

＊＊＊

３章　論証

１節　命題と論証

① 命題と条件

命題　・・・　正しいか正しくないかが定まる文や式

真　・・・　命題が正しいこと

偽　・・・　命題が正しくないこと

例　「７は自然数である」は命題であり、真である。

「１０は３で割り切れる」は命題であり、偽である。

「１０２４は大きい数である」は命題ではない。

条件　・・・　変数を含む文や式で、変数に値を代入したときに真偽が決まるもの。

例　「$x^2 = 4$」は $x = 2$、$x = -2$ を代入したときに真となる「条件」である。

☆命題「$p \Rightarrow q$」

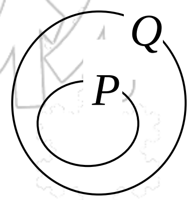
「$x > 4$　ならば　$x > 2$」は２つの条件を使った命題（真）である。

条件 p、q があり、「ならば」を $\Rightarrow$ と表わすと

「p ならば q」を「$p \Rightarrow q$」と書くことができる。このとき p を「**仮定**」、q を「**結論**」という。

条件 p、q を満たすものは集合として表わすことができる。それぞれ P、Q とすると

「$p \Rightarrow q$」　が真のとき　$P \subset Q$　である。



$P \subset Q$

「$p \Rightarrow q$」が真で、かつ「$q \Rightarrow p$」が真のとき

「$p \Leftrightarrow q$」と表わす。このとき、$P = Q$ である。

「$p \Rightarrow q$」が偽であることを示すには、「$p \Rightarrow q$」が成り立たない例を

１つあげれば良い、そのような例を「**反例**」という。

☆必要条件と十分条件

命題「$p \Rightarrow q$」が成り立つとき

p は q の「**十分条件**」という。

q は p の「**必要条件**」という。

例５　$P : x = 3$、$Q : x^2 = 9$ としたとき「$p \Rightarrow q$」は

成り立つが「$q \Rightarrow p$」は成り立たない。（$x^2 = 9$ の解は $x = \pm 3$）

よって、p は q の十分条件であり、必要条件ではない。

q は p の必要条件であり、十分条件ではない。

＊＊＊

> あいまいだが分かりやすい例
>
> 「東大生　ならば　頭が良い」
>
> 東大生なら頭が良いというのに十分。
>
> 頭が良いということは東大生になるには必要。

「$p \Leftrightarrow q$」のとき

p は q の「**必要十分条件**」という。（必要条件であり、十分条件でもある）

＊＊＊

☆条件の否定とド・モルガンの法則

条件 p に対し、「p でない」という条件を p の「**否定**」といい、$\overline{p}$ で表す。
p を集合 P で表すとすると、$\overline{p}$ は集合 $\overline{P}$ となる。

＊＊＊

２つの条件 p 、q があるとき、p 、q は集合で表すことができるため、
ド・モルガンの法則が成り立つ。

$\overline{p\text{かつ}q} \Leftrightarrow \overline{p}\text{または}\overline{q}$、　　　$\overline{p\text{または}q} \Leftrightarrow \overline{p}\text{かつ}\overline{q}$

例９　「$a=3$　かつ　$b \leqq 5$」の否定をド・モルガンの法則より作る。

$p: x<2$、$q: y \geqq 5$ とおけば、「$p\text{かつ}q$」の否定は「$\overline{p\text{かつ}q}$」。ド・モルガンの法則より

「$\overline{p\text{かつ}q} \Leftrightarrow \overline{p}\text{または}\overline{q}$」だから、求める答えは「$a \neq 3$　または　$b>4$」

＊＊＊

② 論証

☆命題の逆と対偶

命題「$p \Rightarrow q$」があるとき

「$p \Leftarrow q$」を「$p \Rightarrow q$」の**逆**（左右が逆）

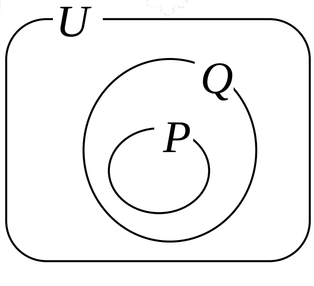
「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を「$p \Rightarrow q$」の**対偶**（条件を否定にして、左右が逆）

という。

＊＊＊

☆対偶を利用する証明法

命題「$p \Rightarrow q$」が真なら、$P \subset Q$ である。このとき右の図より
$\overline{Q} \subset \overline{P}$ である。よって「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」は真である。



命題と対偶

ある命題「$p \Rightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」は
「$p \Rightarrow q$」が真なら、対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も真
「$p \Rightarrow q$」が偽なら、対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も偽

例題１　整数 n について、n^2 が偶数ならば n は偶数であることを証明せよ。

証明　証明したい命題は「n^2 が偶数 $\Rightarrow$ n は偶数」であるが、対偶を証明すればよい。
この命題の対偶は「n が奇数 $\Rightarrow$ n^2 は奇数」である。n が奇数とすれば、ある整数 k を用いて、

$n=2k+1$　　（整数を２倍すれば偶数になる。それに１を足せば奇数となる）

と表わされる。n^2 にこの n を代入すると

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

$(2k^2+2k)$ は整数になるから、２を掛けて、１を足せば奇数となる。よって
「n が奇数 $\Rightarrow$ n^2 は奇数」は真。対偶が真なので「n^2 が偶数 $\Rightarrow$ n は偶数」も真。

＊＊＊

☆背理法

　ある命題を証明するとき、「その命題が成り立たないと仮定すると、矛盾が生じる。よって、その命題は成り立つ。」という論法もある。これを「**背理法**」という。

例題２　「x が無理数ならば、$x-3$ は無理数」を、背理法を用いて証明せよ。

証明したいことは「x は無理数　⇒　$x-3$ は無理数」が真であることである。直接証明するのは難しいので「$x-3$ は無理数でないとすると、x が無理数であることに矛盾する」ことを示せばよい。

$\boxed{\text{証明}}$　$x+3$ が有理数である（無理数でない）と仮定すると、有理数 a をもちいて

$$x-3=a$$

と表すことができる。移項すると

$$x=a+3$$

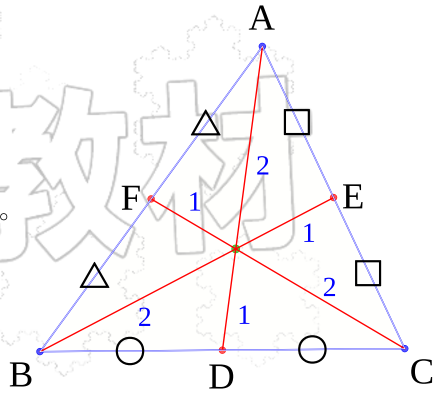
となる。$a+3$ は有理数（有理数どうしの和は有理数）であるから、x が有理数ではないことに矛盾する。よって $x+3$ は無理数。

＊＊＊

4章　平面図形

１節　三角形と比

② 三角形の重心・外心・内心



☆三角形の重心

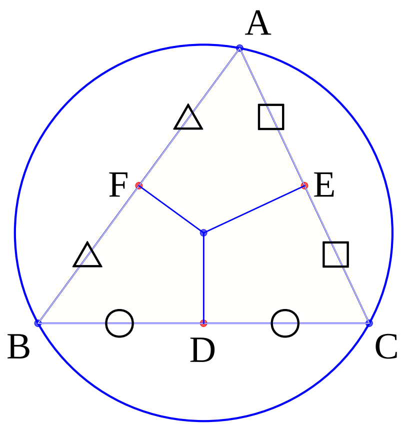
　三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を「**中線**」という。
３本の中線は１点で交わり、それぞれの中点を２：１に「内分」する。また、中線の交点を「**外心**」という。

＊＊＊

☆三角形の外心

　三角形の垂直二等分線は１点で交わる。その点をＯとすると点Ｏを中心として３つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の「**外接円**」といい、点Ｏを「**外心**」という。

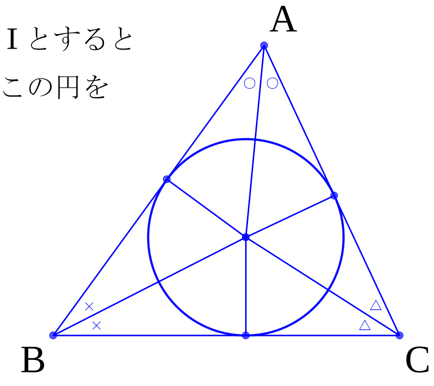
＊＊＊



☆三角形の内心

　三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わる。その点をＩとすると点Ｉを中心として３つの辺に接する円をかくことができる。この円を三角形の「**内接円**」といい、中心Ｉを「**内心**」という。

＊＊＊



③ 三角形の比の定理

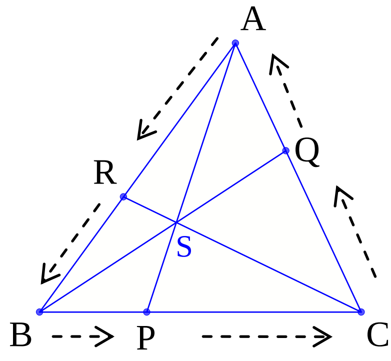
☆チェバの定理

　三角形について以下の定理が成り立つ

チェバの定理

　△ABC の３辺 BC、CA、AB 上にそれぞれ点 P、Q、R があり、３直線 AP、BQ、CR が１点で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



＊＊＊

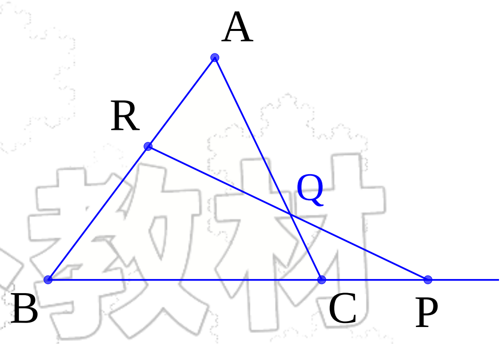
☆メネラウスの定理

　三角形について以下の定理が成り立つ

メネラウスの定理

　ある直線が△ABC の３辺 BC、CA、AB、またはその延長と、それぞれ点 P、Q、R で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



＊＊＊