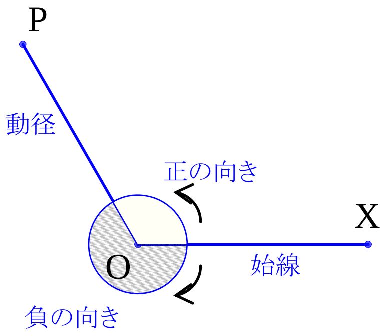
３章　三角関数

１節　三角関数

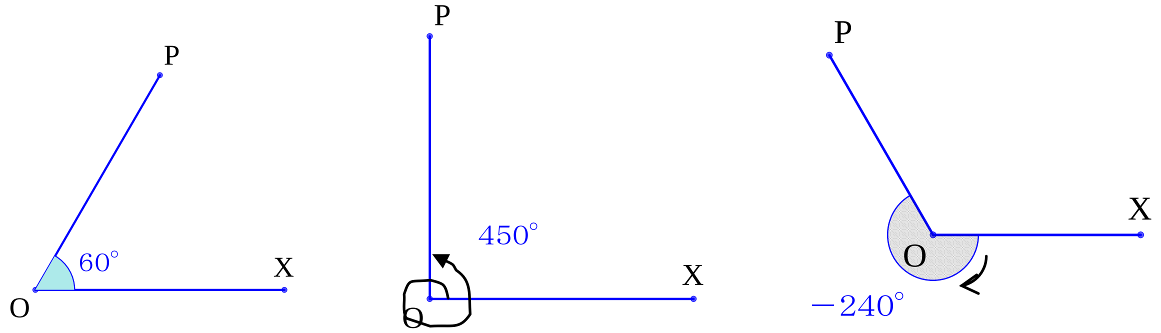
　数学Ｉで習った「三角比」では扱う角度が０°～１８０°であった。ここでは、三角比の考え方をさらに拡張して、１８０°以上の角度や、マイナスの角度を扱えるようにする。

①　一般角

　平面上に中心点Ｏをとる。半直線 OP を点Ｏを中心として回転させることを考える。半直線 OP の最初の位置を半直線 OX とする（通常Ｘはの右側）。このとき半直線 OX を「始線」と呼び、半直線 OP を「動径」という。回転させるとき、時計回りの反対を「正の向き」、時計回りを「負の向き」とする。



例１　動径が６０°、４５０°、－２４０°の場合を示す。



＊＊＊

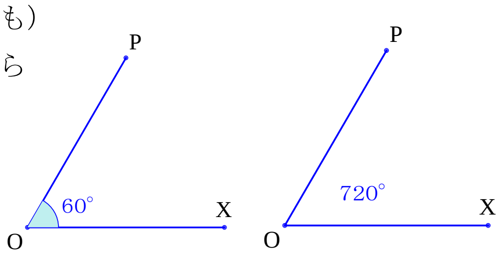
　いままでは０°から３６０°までの角度を扱っていた。これからは３６０°以上の角度や、負の角度も考える。このように大きさや正負の符号を考えた角を「一般角」という。

　また、一般角 α に対して、始線 OX から α 回転した動径を「角 α の動径」という。

動径は３６０°回転すると（正の向きでも、負の向きでも）１周して元の位置に戻る。また、何周しても元に戻るから

角 α の動径が表す一般角は

$$\alpha + 360^\circ \times n \qquad (n \text{ は整数})$$



＊＊＊

②　孤度法

　今までは、角の大きさ（角度）を表すのに、一回転を３６０°とする“度”という単位を使ってきた。ここでは、孤度法とよばれる角の大きさの表し方を学ぶ。

　半径 r の円において

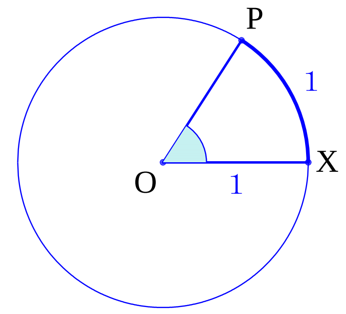
　　　長さ r の弧に対する中心角の大きさ

を「**１ラジアン**」または１孤度という。ラジアンを単位とする角の表し方を「**孤度法**」という。

円周＝$2\pi r$ であるから、３６０°の角は2π ラジアンである。

その他の角は

$360° = 2\pi$ として比例計算をする。

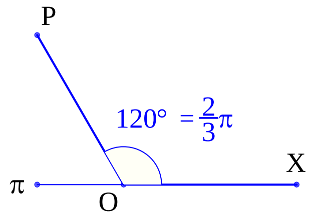


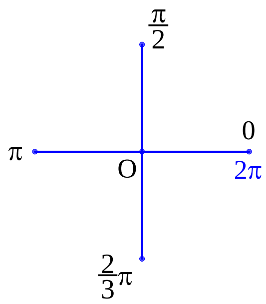
例　$180° = \dfrac{360°}{2}$ だから、$180° = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ ラジアン

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
孤度	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π

例２　１２０°を孤度で表してみよう。

$$120° = 180° \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\pi$$





＊＊＊

孤度法を用いた場合の、角αの動径が表す一般角θは

$$\theta = \alpha + 2\pi n$$

（nは整数）

$\boxed{360°\text{ が }2\pi\text{ に変わっただけ}}$

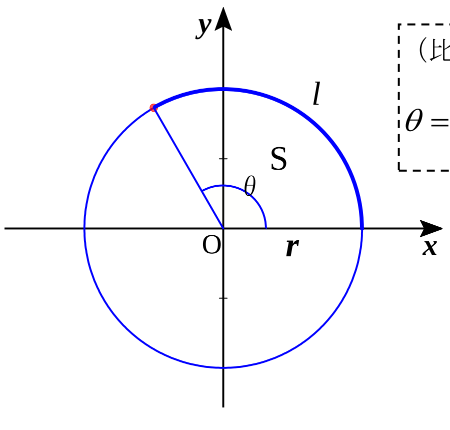
☆扇形の弧の長さと面積

孤度法を用いて扇形の孤の長さと面積を求める。

半径rの円を考える。円周は$2\pi r$ である。扇形の中心角が2π のとき孤の長さが$2\pi r$ となることと、弧の長さは中心角に比例することを利用する。中心角をθ、とすると孤の長さlは

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$$

より　$$l = r\theta$$



（比例計算でも分かる）
$\theta = \pi$ なら弧の長さは$\dfrac{2\pi r}{2}$

扇形の面積は中心角2π のとき面積πr^2 となる。

面積も中心角に比例するので、面積をS とすると

$$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

より　$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$

$\boxed{l = r\theta\text{ を代入}}$

例３　半径４、中心角$\dfrac{5}{6}\pi$ の扇形の弧の長さl、面積をS を求めよ

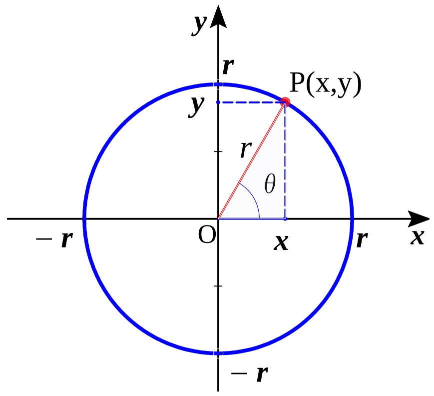
$l = r\theta$ に代入して　$l = 4 \cdot \dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{10}{3}\pi$

$S = \dfrac{1}{2}r^2\theta$ に代入して　$S = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{20}{3}\pi$

＊＊＊

③ 三角関数

数学Ⅰの三角比では $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の $\sin\theta$ 、$\cos\theta$ 、$\tan\theta$ を扱った。ここからは扱う角度を一般角に広げる。ただし、一般角においても $\sin\theta$ 、$\cos\theta$ 、$\tan\theta$ の定義は変わらない。

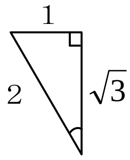


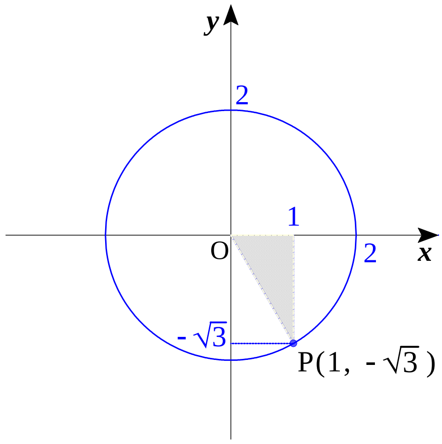
> 三角関数の定義
>
> $$\sin\theta = \frac{y}{r}、\ \cos\theta = \frac{x}{r}、\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

一般角まで考えたとき $\sin\theta$ 、$\cos\theta$ 、$\tan\theta$ を三角関数という。

<u>例４</u>　$\theta = \dfrac{5}{3}\pi$ のときの $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ を求めてみよう。

半径２の円を考える。円周上に点 P を取り、始線との角が $\theta = \dfrac{5}{3}\pi$ のとき、点 P の座標は $(1, -\sqrt{3})$ であるから





$$\sin\frac{5}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

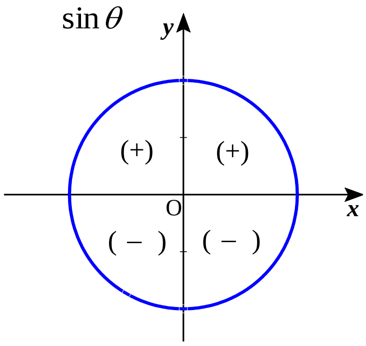
$$\cos\frac{4}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

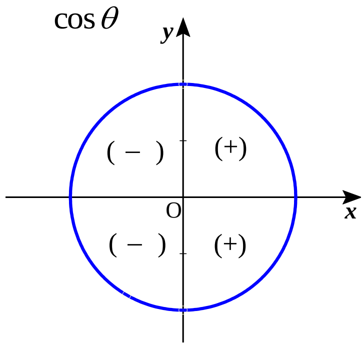
$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

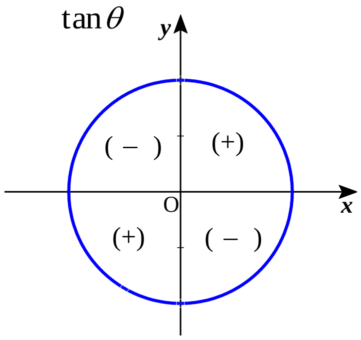
三角関数は角度によって決まり、半径にはよらない。（半径２を考えたのは分かりやすいため。）

＊＊＊

$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ は θ がどの象限にあるかで値の正負が決まる。





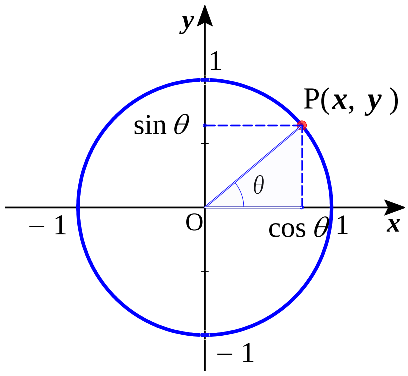


<u>☆三角関数と単位円</u>

$r = 1$ の円（単位円）を考えると

$$\sin\theta = y、\quad \cos\theta = x$$

となる。$r = 1$ なので x と y は－１から１の間の値を取る。



> 三角関数の値の範囲
>
> $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$、　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

上の式は、どのような半径の円を考えても成り立つ。

☆三角関数の相互関係

　次の三角比で学んだ$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$の関係式は一般角の範囲でも成り立つ。

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}、\quad 1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$$

例題１　θが第３象限の角で、$\cos\theta=-\frac{4}{5}$のとき、$\sin\theta$、$\cos\theta$の値を求めよ。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$より、$\cos^2\theta$を移項して

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

両辺の平方根を取ると

数学Ｉの三角比と同様！

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\pm\frac{3}{5}$$

θが第３象限の角であることから、$\sin\theta<0$（負の値）なので

$$\sin\theta=-\frac{3}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(-\frac{4}{5}\right)}=\frac{3}{4}$$

＊＊＊

例題２　θが第４象限の角で、$\tan\theta=-3$のとき、$\sin\theta$、$\cos\theta$の値を求めよ。

$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$　より　$\tan^2\theta=9$　を代入して

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+9=10\quad よって\quad \cos^2\theta=\frac{1}{10}$$

θが第４象限の角であることから、$\cos\theta>0$（正の値）なので、

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

分母の有理化！

　また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$　より

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-3)\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

＊＊＊

例題３　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき、$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$　の両辺を２乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9} \implies 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}-1=-\frac{8}{9}$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{8}{9}$

＊＊＊

4　三角関数の性質

角 $\theta+2n\pi$ （n は整数）の三角関数は θ を１回転させるのを繰り返しただけなので、θ と同じ値を取る。

$$\boxed{\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta、\quad \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta、\quad \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta}$$

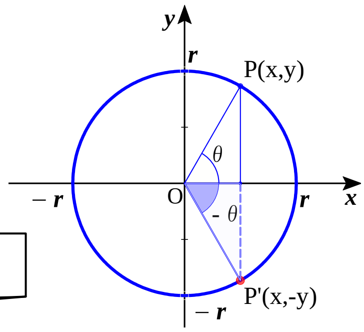
例６　$\sin\dfrac{7}{3}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三角関数は $0\sim2\pi$ の値を覚えれば良い。

θ に対して $-\theta$ の三角関数を考える。考える直角三角形は同じだが y 座標の符号が逆になっている。

$$\sin\theta=\frac{y}{r}、\cos\theta=\frac{x}{r}、\tan\theta=\frac{y}{x}$$

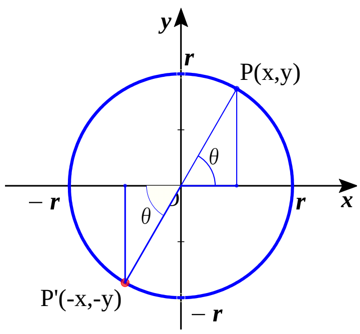
であるから（三角関数の定義）、sin 、tan は符号が逆になる。



$$\boxed{\sin(-\theta)=-\sin\theta、\cos(-\theta)=\cos\theta、\tan(-\theta)=-\tan\theta}$$

＊＊＊

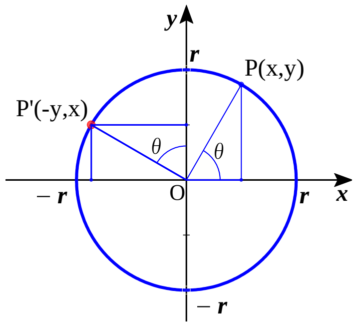
θ に対して $\theta+\pi$ の三角関数を考える。直角三角形は原点と対称の位置にできる。（直角三角形が π だけ回転したもの）x 座標、y 座標ともに符号が逆になるので
三角関数の定義より、sin 、cos は符号が逆になる。



$$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta、\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$$

$$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$$

θ に対して $\theta+\frac{\pi}{2}$ の三角関数を考える。直角三角形が $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものなので、x 座標は $-y$ に置き換わり、y 座標は x に置き換わる。三角関数の定義より



$$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta \text{、} \cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$$

$$\tan(\theta+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\tan\theta}$$

$\theta+\pi$ と $\theta+\frac{\pi}{2}$ の公式の θ を $-\theta$ とおくと、$\pi-\theta$ と $\frac{\pi}{2}-\theta$ の公式が得られる。

例　$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ の θ を $-\theta$ に置き換えると $\sin(-\theta+\pi)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

よって、　　　　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta \text{、} \quad \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \text{、} \quad \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \text{、} \quad \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \text{、} \quad \tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

＊＊＊

5　三角関数のグラフ

☆ $y=\sin\theta$、$y=\cos\theta$ のグラフ

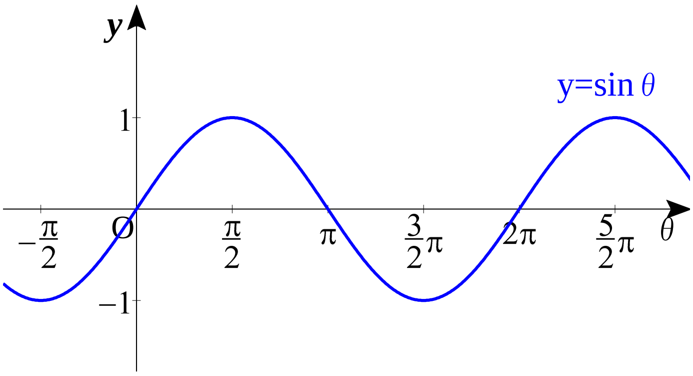
　三角関数と角 θ の関係をグラフにしてみよう。

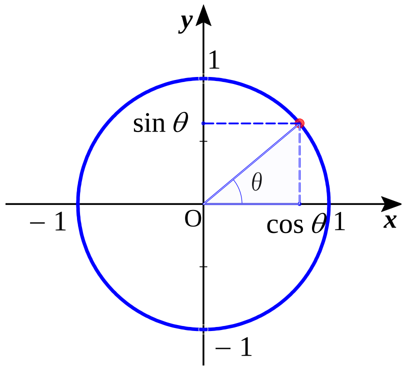
$\sin\theta$ の値は以下の表のようになる。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

θ	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0

ここで、$y=\sin\theta$ とおいてグラフをかくと



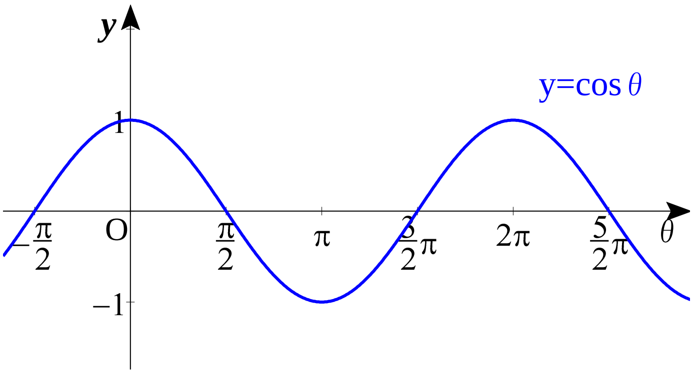


単位円

となる。（横軸は x でなく θ であることに注意！）

$y=\sin\theta$ のグラフの形をした曲線を「**正弦曲線**」という。

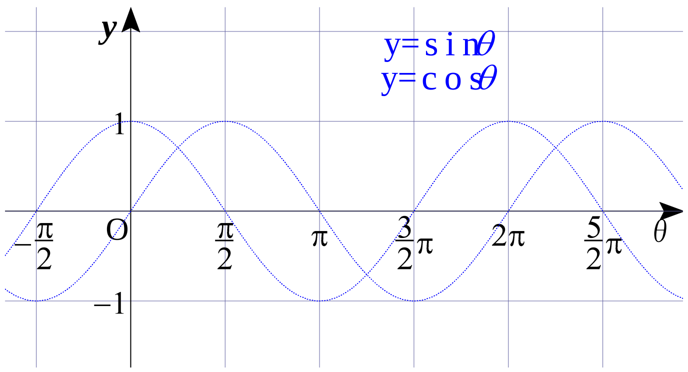
また同様にして $y=\cos\theta$ のグラフをかくと



となる。

$y=\cos\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを（$-\frac{\theta}{2}$ だけ）左にずらしたものである。

練習！！　$y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ のグラフを書く練習をしよう！



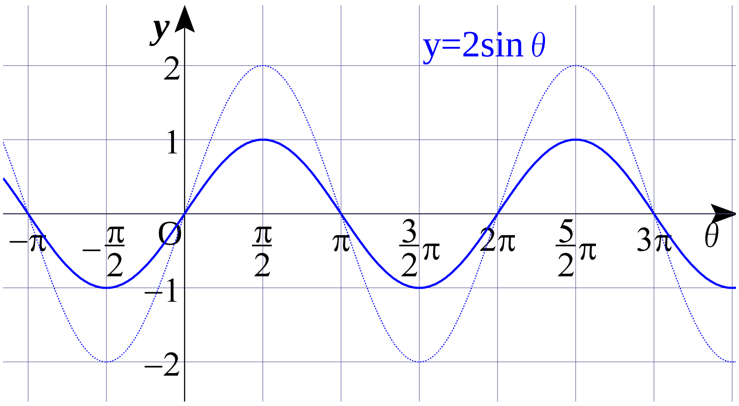
点線をなぞろう！！

$y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ は 2π ごとに同じ形をくりかえす。このことを、

「$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は**周期** 2π **の周期関数**である」という。

また、$y=\sin\theta$ は原点に関して対称、$y=\cos\theta$ は y 軸に関して対称である。

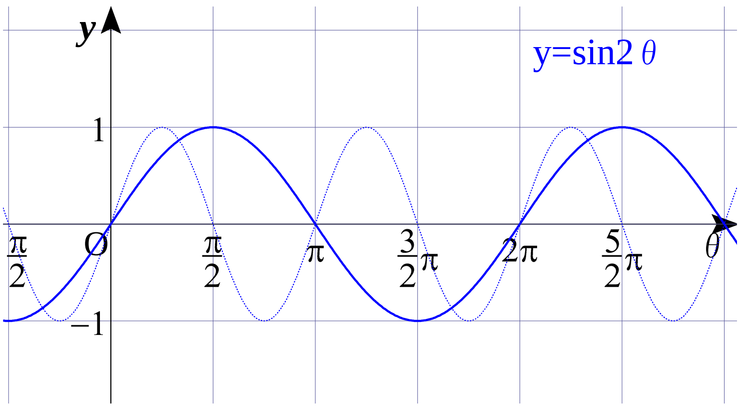
例７　$y=\sin\theta$ を参考にして $y=2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。



点線をなぞろう！！

$y=2\sin\theta$ のグラフは、$y=\sin\theta$ のグラフを縦方向（y 軸方向）に２倍したグラフになる。
周期は $y=\sin\theta$ と同じで 2π 。
＊＊＊

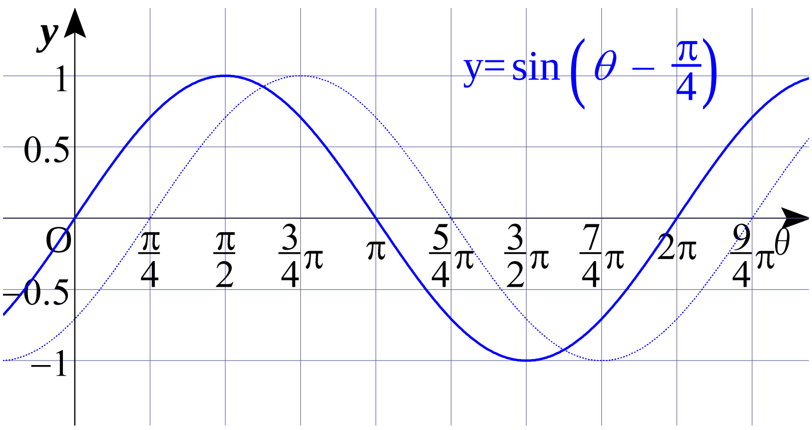
例８　$y=\sin\theta$ を参考にして $y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。



点線をなぞろう！！

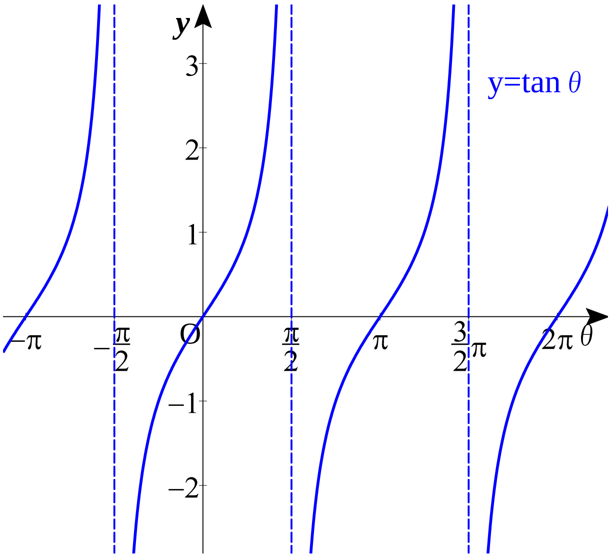
$y=\sin 2\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。
または、$y=\sin\theta$ より２倍の速度で動くグラフとも言える。
＊＊＊（演習）教科書Ｐ１０１の問１９、問２０を解きなさい。＊＊＊

例９　$y=\sin\theta$ を参考にして $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかいてみよう。



点線をなぞろう！！

☆ $y=\tan\theta$ のグラフ
　それぞれの θ に対して $\tan\theta$ を計算すると、$y=\tan\theta$ のグラフをかくことができる。



$y=\tan\theta$ はπごとに同じ形をくり返すので、周期πの周期関数である。
また、原点に関して対称である。

$\tan\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi, -\dfrac{\pi}{2}$ のときは定義されない。ただし、これらの値に

θを近づけていくと、直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ などに限りなく近づいていく。このような

直線を、グラフの「**漸近線**」という。

＊＊＊