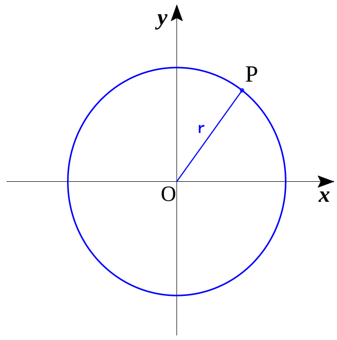
３節　軌跡と領域

① 軌跡の方程式

軌跡・・・ある条件を満たしながら動く点が描く道筋（道筋が作る図形）

<u>例題１</u>　原点から一定の距離 r 離れたところを動く点Ｐの描く軌跡は、中心が原点、半径 r の円であり、その方程式は $x^2+y^2=r^2$ である。



軌跡の問題を解く基本的な手順は

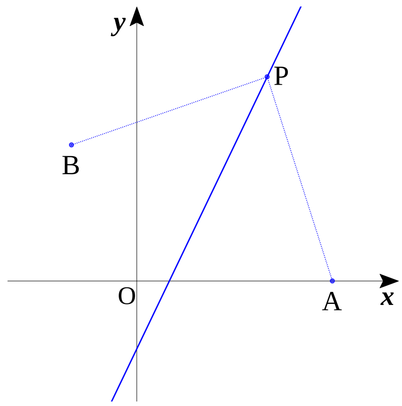
　① 軌跡を描く点の座標を (x,y) とおく。

　② 軌跡に関する条件より x と y の関係式を作る

　③ 関係式を整理して得られた関数より、どのような図形か判断する。

となる。問題文から求める軌跡を予想するのは難しい。

<u>例題２</u>　２点Ａ $(3,0)$、Ｂ $(-1,2)$ から等距離なる点の軌跡を求めよ。



$\boxed{解}$　条件を満たす点Ｐの座標を (x,y) とおくと　　手順①

ＡＰ＝ＢＰ　より

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$　　手順②

2 点間の距離の公式

両辺を２乗して

$$(x-3)^2+y^2=(x+1)^2+(y-2)^2$$

カッコを展開して整理すれば

$$y=2x-1$$　　手順③

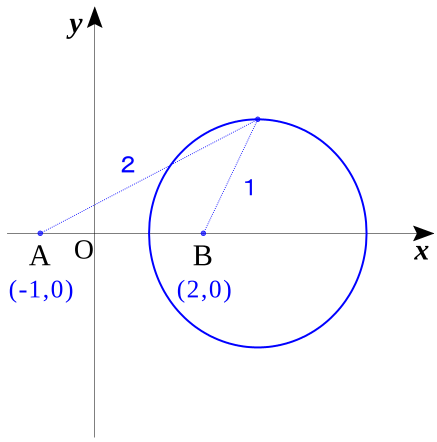
よって、求める軌跡は直線 $y=2x-1$ である。

＊＊＊

<u>例題３</u>　２点Ａ $(-1,0)$、Ｂ $(2,0)$ に対して、

ＡＰ：ＢＰ＝２：１

を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。



$\boxed{解}$　点Ｐの座標を (x,y) とおくと

　ＡＰ：ＢＰ＝２：１より

　　ＡＰ＝２ＢＰ

となる。よって

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

両辺を２乗して

$$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$$

整理すると

$$x^2+y^2-6x+5=0$$

平方完成して

$$(x-3)^2+y^2=4$$

ゆえに、点Ｐの軌跡は中心 $(3,0)$、半径２の円である。

＊＊＊

<u>例題４</u>　円 $x^2+y^2=8$ を C とする。点Ｐが円 C 上を動くとき、

点Ａ $(2,0)$ と点Ｐを結ぶ線分ＡＰの中点Ｑの軌跡を求めよ。

方針：点Ｑの描く軌跡を求めるので、点Ｑの座標を (x,y) とおく。

点Ｐの座標を (s,t) などとおき、与えられた条件から s,t の関係式と s,t,x,y の関係式をつくる。

連立方程式のように s,t を消去して、軌跡の方程式を得る。

$\boxed{解}$　点Ｐの座標を (s,t) とする。Ｐは円Ｃ $x^2+y^2=8$ 上の点であるから、s,t をそれぞれ代入して

$s^2+t^2=8$　・・・①

また、点Ｑの座標を (x,y) とすると、Ｑは線分ＡＰの中点であるから

$x=\dfrac{s+2}{2}$、　　$y=\dfrac{t+0}{2}$

変形すると

$s=2x-2$、　$t=2y$　・・・②

②を①に代入すると

$$
\begin{aligned}
(2x-2)^2+(2y)^2&=8\\
(2x-2)(2x-2)+4y^2&=8\\
2(x-1)\cdot 2(x-1)+4y^2&=8\\
4(x-1)^2+4y^2&=8
\end{aligned}
$$

両辺を４で割って

$(x-1)^2+y^2=2$

ゆえに、点Ｑの軌跡は中心 $(1,0)$、半径 $\sqrt{2}$ の円である。

＊＊＊

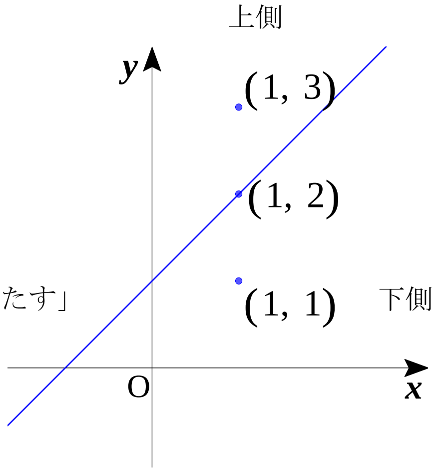
②　不等式の表す領域

<u>☆直線を境界とする領域</u>

直線の方程式を使って不等式の満たす領域を表してみよう。

<u>例１</u>

直線 $y=x+1$ を図に書いてみる。（右図）



直線上に点を打てばその座標は方程式 $y=x+1$ を満たす。

例　点 $(1,2)$ はそれぞれ座標を $y=x+1$ に代入すると

	左辺	右辺
	２	１＋１
⇒	２	２

のように両辺が等しくなる（これが「$y=x+1$ を満たす」という意味)。

次に $y=x+1$ の上側に点を打ってみる。

例　点 $(1,3)$ はそれぞれ座標を $y=x+1$ に代入すると

	左辺	右辺
	３	１＋１
⇒	３	２

で左辺の方が大きくなる。上側に点を打てば必ず左辺＞右辺となるので上側の領域は

$y > x+1$

となる。同様に $y = x+1$ の下側に点を打ってみると

$y < x+1$

となる。

> 不等式の直線の上側・下側
>
> 直線　$y > mx+n$　の表す領域は　$y = mx+n$ の**上側**
>
> 直線　$y < mx+n$　の表す領域は　$y = mx+n$ の**下側**

例２　不等式　$2x - y + 2 \geqq 0$　の表す領域を図示せよ。

$2x - y + 2 \geqq 0$　を変形して

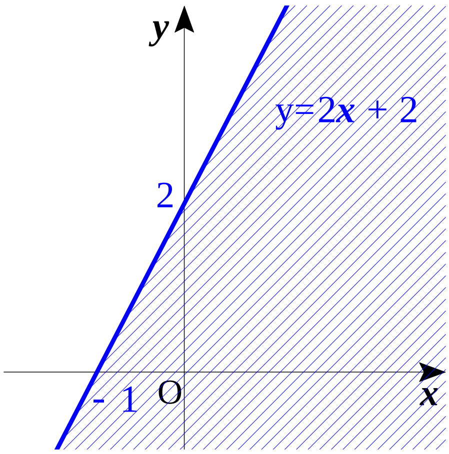
$-y \geqq -2x - 2$

$y \leqq 2x + 2$

よって、この直線が表す領域は

$y = 2x + 2$

の下側になる。ただし、$y = 2x + 2$ の線上も含む



> ≧、≦の場合は線上も含む
>
> （$y = 2x + 2$　と　$y < 2x + 2$　を併せた領域と考えられる）

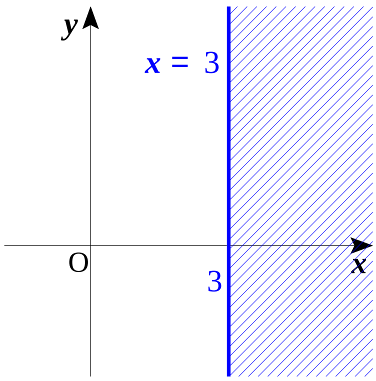
＊＊＊

例３　不等式　$x > 3$　を満たす領域を図示せよ。

直線　$x = 3$　を書き、右側に適当な点を取ると、必ず $x > 3$ となるので

$x > 3$　が表す領域は　$x = 3$　の右側になる。

注：$x \geqq 3$　なら線上も含む



☆円を境界とする領域

例４　不等式　$(x-2)^2 + (y-1)^2 < 9$　の表す領域を図示せよ。

両辺の平方根を取ると

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < 3$

左辺は座標 (x, y) の点と、座標 $(2,1)$ の点の間の距離を表している。

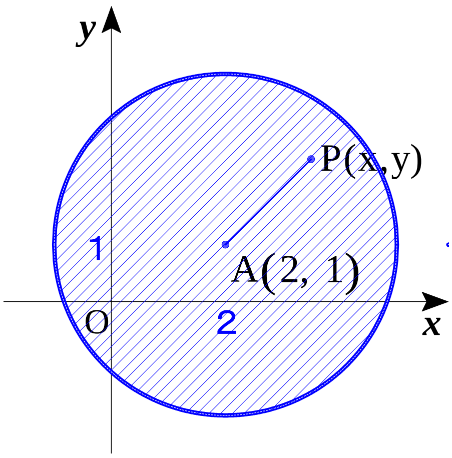
それぞれ点Ｐ (x, y)、点Ａ $(2,1)$ とすると上式が表す領域は

$\mathrm{AP} < 3$

となる。

これは　円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$　の内側になる。

ただし、線上は含まない。



> そもそも、円とは中心点から等距離の点の集まりであった。
>
> $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
>
> は中心 $(2,1)$ から距離３の点の集まり。

不等式と円

円　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　を C とすれば

$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$　は　円 C の**内側**

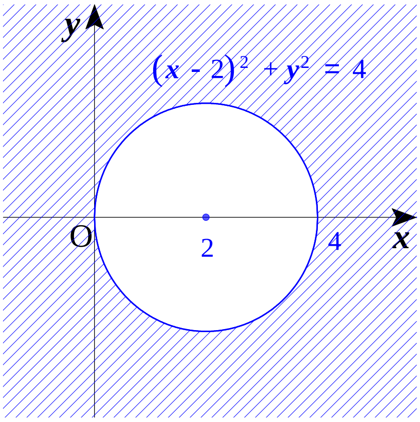
$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$　は　円 C の**外側**

＊＊＊

例題５　不等式　$x^2+y^2-4x \geqq 0$　の表す領域を図示せよ。

まず与式を変形（平方完成）すると

$$x^2+y^2-4x \geqq 0$$
$$(x-2)^2-4+y^2 \geqq 0$$
$$(x-2)^2+y^2 \geqq 4$$



この式が表す領域は円　$(x-2)^2+y^2=4$　の外側および線上である。（≧、≦の場合は線上も含む）

＊＊＊

③ 連立不等式の表す領域

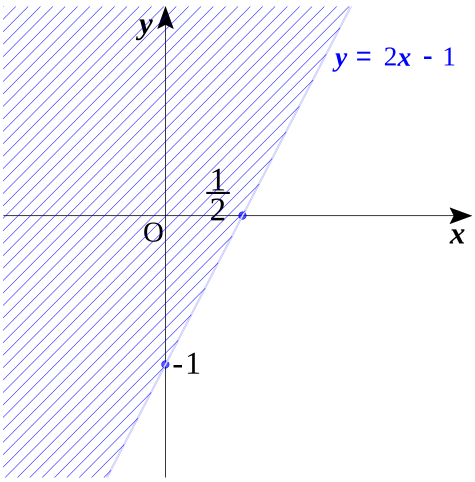
連立不等式が表す領域は、それぞれの不等式をすべて満たす領域である。

例５　連立不等式

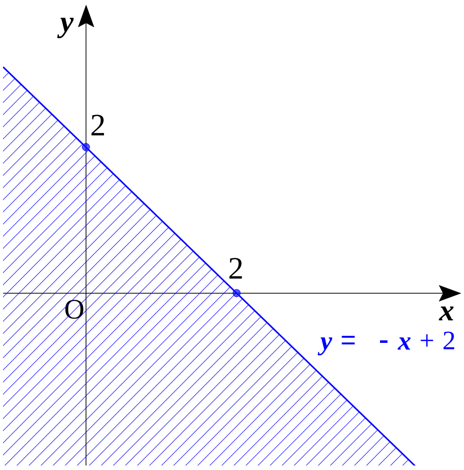
$$\begin{cases} y>2x-1 & \cdots ① \\ y<-x+2 & \cdots ② \end{cases}$$

の満たす領域を求めよ。

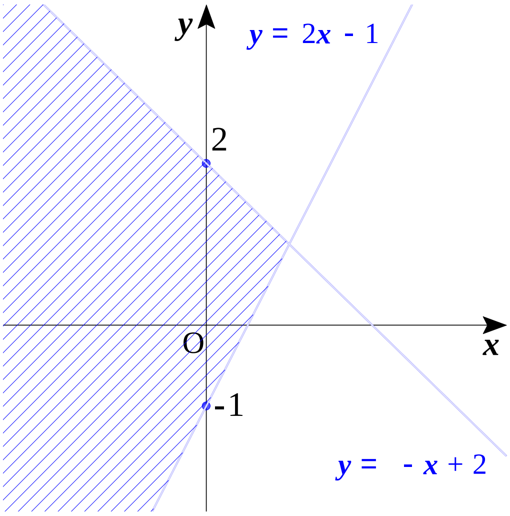
まず①が表す領域は



②が満たす領域は



①と②を両方とも満たす領域は、以下のような①と②の領域の共通部分になる。

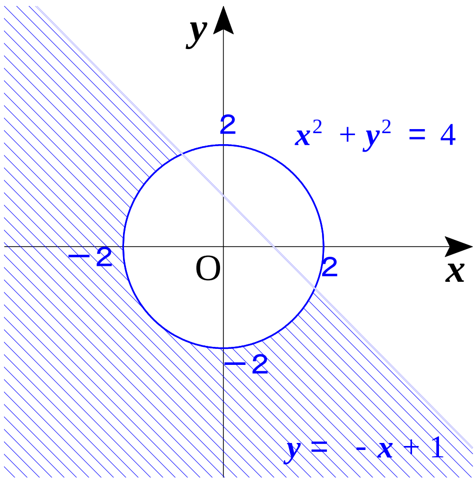


ただし、境界線上は含まない。

＊＊＊

例題６　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2>4 & \cdots ① \\ y<-x+1 & \cdots ② \end{cases}$$



　①と②の共通部分が求める領域である。

①は円　$x^2+y^2=4$　の外部

②は直線　$y=-x+1$　の下側

よって、求める領域は右図の斜線部分となる。

ただし、境界線は含まない。

＊＊＊

☆領域と最大値・最小値

例題７

　連立不等式

$$2x+y\leqq 8、\quad x+3y\leqq o、\quad x\geqq 0、\quad y\geqq 0$$

の表す領域を D とする。点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき、$x+y$ のとる値の最大値と最小値を求めよ。

まず、領域 D を図示する。（$y\leqq -2x+8$、　$y\leqq -\dfrac{1}{3}x+3$、　$x\geqq 0$、　$y\geqq 0$）

領域 D の頂点を O(0, 0)、A(4, 0)、B(3, 2)、C(0, 3) とする。

$$x+y=k \qquad \cdots ①$$

と置き、k が最大・最小になる場合を考える。領域 D の中のすべての点で k を求めることは不可能なので、①を直線の方程式と考え

$$y=-x+k$$

と変形する。これは、傾き－１、切片 k の直線である。

これを図に書き加える。

k を増やしたり減らしたりすると、$y=-x+k$ は上下する。

$y=-x+k$ と領域 D が共有部分をもつとき、点 (x, y) は領域 D の中にある。

　k の値が最大になるのは①が B$(3, 2)$ を通るときであり、

k の値が最小になるのは①が O$(0, 0)$ を通るときである。

すなわち、$x+y$ のとる値の最大値と最小値は

$x=3$、$y=2$　のとき　　最大値 5

$x=0$、$y=0$　のとき　　最大値 0

＊＊＊