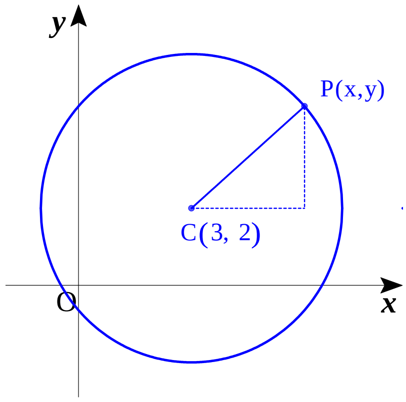
２節　円

① 円の方程式

☆円の方程式

円とはある点（中心）から同じ距離にある点の集まりである。では、座標上では円はどのように表わされるだろうか。

今、点Ｃ$(3,2)$を中心とする半径４の円があるとする。円周上に点Ｐ(x,y)をとると、点Ｃと点Ｐの間の距離は４だから



$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=4$$

両辺を２乗すると

$$\underbrace{(x-3)^2+(y-2)^2}_{中心の座標}=4^2 \longleftarrow 半径の２乗$$

これが中心$(3,2)$、半径４の円の方程式となる。

円の方程式

> 点(a,b)を中心とする半径rの円の方程式は
>
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

＊＊＊

例１　点Ａ$(-4,1)$を中心とし、原点Ｏを通る円は、半径が線分ＯＡの長さの円である。

$$\mathrm{OA}=\sqrt{(-4)^2+1^2}=\sqrt{17}$$

$r=\sqrt{17}$、$a=-4$、$b=1$ として公式に代入

したがって、この円の方程式は$(x+4)^2+(y-1)^2=17$

＊＊＊

円の方程式は　$x^2+y^2+lx+my+n=0$

の形で表わされることもある。ただし、平方完成を使って$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$の形に変形すれば、中心の座標と半径を知ることができる。

例２　$x^2+y^2+4x-2y-15=0$の中心の座標と半径を求めよ。

与式をxとyを別々に平方完成を行う。

$$(x^2+4x)+(y^2-2y)-11=0 \qquad x\text{の項と}y\text{の項を分ける}$$

$$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1-11=0 \qquad x\text{と}y\text{を別々に平方完成}$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=16 \qquad \text{定数項を右辺へ移項}$$

よって、中心の座標は$(-2,1)$で半径は４。

＊＊＊

☆３点を通る円

円の方程式は、円を通る３点がわかっていれば、求めることができる。

例題１　３点Ａ$(1,0)$、Ｂ$(2,-1)$、Ｃ$(3,2)$を通る円の方程式を求めよ。

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。
この円がＡ、Ｂ、Ｃを通るならば、それぞれの座標を
x と y に代入して３つの方程式を得る。
まず、Ａ $(1,0)$ を代入して

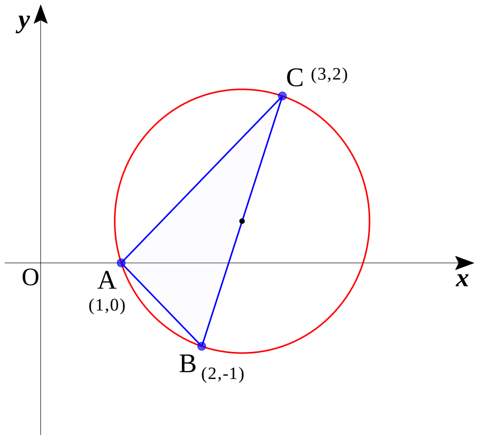
$$1+l+n=0$$
$$l+n=-1$$

Ｂ $(2,-1)$ を代入して

$$4+1+2l-m+n=0$$
$$2l-m+n=-5$$

Ｃ $(3,2)$ を代入して

$$9+4+3l+2m+n=0$$
$$3l+2m+n=-13$$



この３式を連立方程式として解き、l 、m 、n を出す。

$$\begin{cases} l+n=-1 & \cdots ① \\ 2l-m+n=-5 & \cdots ② \\ 3l+2m+n=-13 & \cdots ③ \end{cases}$$

②×２＋③より（②の両辺に２を掛けて、③の両辺２を足す） $7l+3n=-23$

$$7l+3n=-23 \quad \cdots ④$$

④－①×３より　$l=-5$
これを①代入して $n=4$
②に代入して　$m=-1$
よって　$x^2+y^2-5x-y+4=0$
＊＊＊
３点を通る円の中心は、３点を結んだ三角形の「**外心**」である。円の方程式から外心の座標を求めることができる。

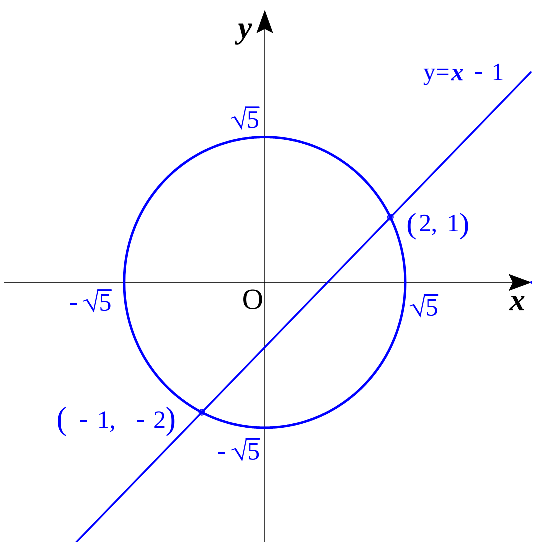
２ 円と直線

☆円と直線の共有点

２直線の交点(共有点)を求めたのと同じ様に、円と直線の共有点は２つの方程式を連立方程式として解くことによって求められる。

例題２　円　$x^2+y^2=5$　と直線 $y=x-1$ の共有点を求めよ。
２つの方程式を連立方程式として解く。

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=x-1 & \cdots ② \end{cases}$$



$y=x-1$ を①に代入して

$$x^2+(x-1)^2=5$$
$$x^2+x^2-2x+1=5$$
$$2x^2-2x-4=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0$$

よって、$x=-1, 2$。これを②に代入して

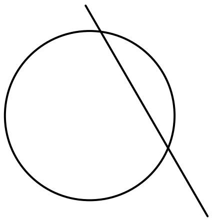
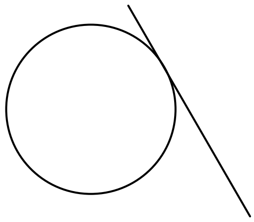
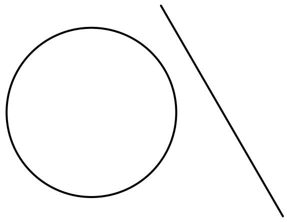
$x=-1$ のとき $y=-2$、$x=2$ のとき $y=1$

したがって、共有点の座標は $(-1,-2)$ と $(2,1)$ である。

＊＊＊

☆共有点の個数と判別式

円と直線の共有点を求めるとき、２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解くことになる。
この２次方程式の実数解の個数が共有点の個数となるので、$ax^2+bx+c=0$ の
判別式 $D=b^2-4ac$ から共有点の個数を求めることができる。

		
$D>0$	$D=0$	$D<0$
共有点２個	共有点１個	共有点なし
２点で交わる	１点で接する	

例３　円　$x^2+y^2=5$　と直線　$y=x-3$　の共有点の個数を調べよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=x-3 & \cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入して　$x^2+(x-3)^2=5$

展開して　$x^2+x^2-6x+9=5$

$2x^2-6x+4=0$

この２次方程式の判別式Ｄは

$D=(-6)^2-4\cdot 2\cdot 4=4$

$D>0$ なので、円　$x^2+y^2=5$　と直線　$y=x-3$　の共有点は２個である。

例題３　直線　$y=2x-k$　が円　$x^2+y^2=1$　に接するような定数 k を求めよ

方針：直線が円に接するときは、連立方程式の判別式 D が０であることを利用する。

二つの方程式から

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ① \\ y=2x-k & \cdots ② \end{cases}$$

①に②を代入すると

$x^2+(2x-k)^2=1$

展開して整理すると

$5x^2-4kx+(k^2-1)=0$

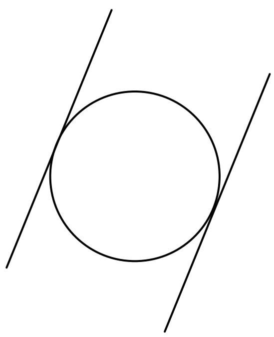
この方程式の判別式 D が０なら、円と直線は接する。D は

$D=(-4k)^2-4\cdot 5\cdot (k^2-1)=20-4k^2$

$D=0$（直線は円に接している）より

$20-4k^2=0$

これを解いて



$$-4k^2=-20$$
$$k^2=5$$
よって　$k=\pm\sqrt{5}$

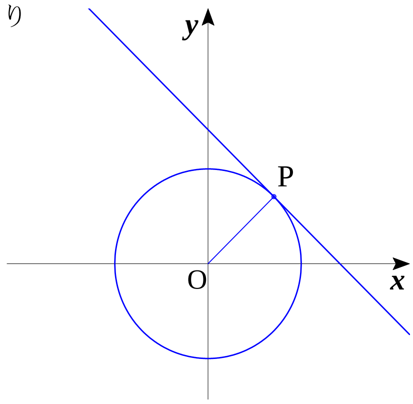
＊＊＊

同じ傾きの接線は二つある。

☆円の接線

原点を中心とする円　$x^2+y^2=r^2$　の円周上にある点P(x_1,y_1)を通る接線の方程式を求める。

(１)線分ＯＰと求める接線は垂直なので、垂直の条件（$mm'=-1$）を使って接線の傾きを求める。線分ＯＰの傾きmはＯ$(0,0)$、Ｐ(x_1,y_1)より



$$m=\frac{y_1-0}{x_1-0}=\frac{y_1}{x_1}$$

接線の傾きm'は

$$m'\cdot\frac{y_1}{x_1}=-1$$
$$m'=-\frac{x_1}{y_1}$$

よって、接線の方程式は傾き$-\frac{x_1}{y_1}$で(x_1,y_1)を通る直線になる。この方程式は

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

両辺にy_1をかけて整理すると

$$yy_1-y_1{}^2=-x_1(x-x_1)$$
$$yy_1-y_1{}^2=-xx_1+x_1{}^2$$
$$yy_1+xx_1=x_1{}^2+y_1{}^2$$

三平方の定理から右辺は　$x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$　となる。文字の並びを整えると

$$x_1x+y_1y=r^2$$

円の接線の方程式

円$x^2+y^2=r^2$の円周上の点(x_1,y_1)における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

＊＊＊

例題４　点$(4,0)$を通り、円$x^2+y^2=4$　に接する直線の方程式を求めよ。

方針：接線の方程式から連立方程式を作る

解　求める接線が円に接する点をP(x_1,y_1)とすると、接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=4$$

この接線は$(4,0)$を通るのでx,yに代入できる。

$$x_1\times4+y_1\times0=4$$
$$x_1=1\quad\cdots①$$

また、点Ｐは円周上の点であるから、三平方の定理より

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = 4 \quad ・・・②$$

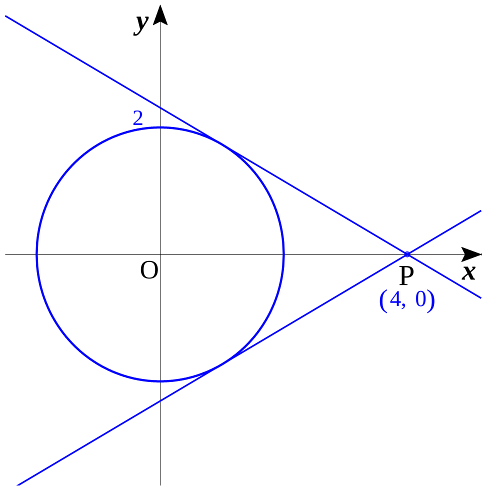
①と②を連立方程式として解く。

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1{}^2 + y_1{}^2 = 4 \end{cases}$$

②に①を代入して

$$1^2 + y_1{}^2 = 4$$

$$y_1 = \pm\sqrt{3}$$



接線の方程式は $yy_1 + xx_1 = r^2$ であるから、求める接線は２つある。それぞれ代入すると

$$x + \sqrt{3}y = 4、\quad x - \sqrt{3}y = 4$$

＊＊＊