３節　高次方程式

① 因数定理

☆剰余の定理

　文字 x を用いた整式を $P(x)$、$Q(x)$ などの記号で表すことがある。正式 $P(x)$ があったとき
$P(x)$ の変数 x に２を代入したときの値を $P(2)$ のように表す。

$y=f(x)$ と同じように表せる。

例１

$P(x)=x^3-x^2+2$　とすると　$P(3), P(-2)$ は

$$P(1)=3^3-3^2+2=20$$
$$P(-2)=(-2)^3-(-2)^2+2=-10$$

となる。

　整式 $P(x)$ を１次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは定数となる。
その商を $Q(x)$、余りを R とすれば

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

x に α を代入すると

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=0+R=R$$

ここが０になる

思い出そう！
整式の割り算では、割る式より
次数が小さくなるまで計算する

よって、次の定理が成り立つ。

剰余の定理と因数定理

整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ である。　（剰余の定理）
整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるとき、$P(\alpha)=0$ である。　（因数定理）

例２

　整式 $P(x)=2x^3-3x+4$ を
$x-1$ で割った余りは　$P(1)=2\cdot1^3-3\cdot1+4=3$
$x+2$ で割った余りは　$P(-2)=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)+4=-6$
となる。

＊＊＊

例題１　整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると３余り、$x+2$ で割ると－５余る。
$P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

解　$P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの余りを $Q(x)$ とする。あまりは１次以下の
整式であるから、それを $ax+b$ とおくと

$$P(\alpha)=(x-2)(x+2)Q(\alpha)+ax+b=0$$

ここで　$P(2)=2a+b$、　$P(-2)=-2a+b$　・・・①

一方、剰余の定理より

$P(2)=3$、$P(-2)=-5$　・・・②

であるはずだから、①、②より　$2a+b=3$、$-2a+b=-5$

これを解くと　$a=2$、$b=-1$

よって、求める余りは　$2x-1$

＊＊＊

<u>例題２</u>　x^3+2x^2-5x+a が $x-2$ で割り切れるように、定数 a の値を定めよ。

$\boxed{解}$　$P(x)=x^3+2x^2-5x+a$ とおく。
$P(x)$ が $x-2$ で割り切れる、ということは因数定理を使えば

$$P(2)=0$$

ということである。

$$P(2)=2^3+2\cdot 2^2-5\cdot 2+a=6+a$$

だから、$P(2)=0$ より

$$6+a=0 \quad すなわち \quad a=-6 となる。$$

＊＊＊

<u>例題３</u>　因数定理を用いて、x^3-7x+6 を因数分解せよ

$\boxed{解}$　$P(x)=x^3-7x+6$ とおいて

$P(\alpha)=0$ となる α を探す。（0付近の整数を代入してみる)）

x に1を代入

$$P(1)=(1)^3-7\cdot(1)+6=0$$

これより、$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。すなわち $P(x)$ は

$P(x)=(x-1)(x の２次式)$　という形になる。

そこで、$P(x)$ を $x-1$ で割り(整式の割り算)、x の２次式を得る。

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x-6 \\ \hline x-1 & x^3 \qquad -7x+6 \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & x^2-7x \\ & \underline{x^2-x} \\ & -6x+6 \\ & \underline{-6x+6} \\ & 0 \end{array}$$

$$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$

x^2+x-6 を因数分解して

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$$

＊＊＊

３　簡単な高次方程式

一般に

$$x の n 次式=0$$

の形の方程式を n 次方程式という。

例　$x^3-2x^2+3x-1=0$ ：　３次方程式
$x^4+4x^3-2x^2+3x-1=0$ ：　４次方程式

３次以上の方程式は高次方程式と呼ばれる。高次方程式は、２次方程式のような解の公式はない。しかし、因数分解により簡単に解ける場合がある。

<u>☆因数分解による解法</u>

<u>例題４</u>　方程式 $x^3=1$ を解け。

$\boxed{解}$　１を左辺に移項して

$$x^3-1=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^3+x+1)=0$$

この式が成り立つには、

$x-1=0$　か　$x^3+x+1=0$　ならばよい。

よって、この２式を解いて、

$$x=1、x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

＊＊＊

$x^3=1$の３つの解を「**１の３乗根**」もしくは「**１の立方根**」という。

例題４から、１の３乗根は

１　と　$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$　である。

１の３乗根のうち虚数であるものの一つを「ω」と書くことがある。

＊＊＊。

おまけ

$x^3=a$の解はaの３乗根という。

同様に

$x^n=a$の解はaのn乗根という。

一般にn次方程式はn個の解をもっている。$a,b,c\cdots$を解として、因数分解すれば、

$$\underbrace{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots}_{n\text{個}}=0$$

という形になる。

ただし、重解をもつ場合は

$$\underbrace{(x-a)^2(x-b)(x-c)\cdots}_{n-1\text{個}}=0$$

のようになる。この場合はaが２重解になる。同様に$(x-1)^3=0$の解$x=1$を３重解という。

例題５

$x=1+i$が方程式$x^3+ax+b=0$の解であるとき、実数a,bの値を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　$x=1+i$が方程式$x^3+ax+b=0$の解であるから、$x=1+i$を代入できる。

$$(1+i)^3+a(1+i)+b=0$$

$$-2+2i+a+ai+b=0$$

実部と虚部に分けると（iで整理すると）

$$(a+b-2)+(a+2)i=0$$

複素数の相等より

$$\begin{cases}a+b-2=0\\a+2=0\end{cases}$$

これを解いて、

$$a=-2、b=4$$

このとき、問題の方程式は$x^3-2x+4=0$となる。

左辺を因数分解して　$(x+2)(x^2-2x+2)=0$

$$x=-2、x=1\pm i$$

思い出そう！！

複素数の相等を考えて

$$A+Bi=0\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$$

よって、ほかの解は　$x=-2$、$x=1-i$

＊＊＊

一般に、複素数の範囲では**n 次方程式は n 個の解をもつ**。ただし、重解がある場合は m 重解を m 個と数える。