２節　２次方程式

１．複素数とその計算

実数を２乗すると、必ず正の実数もしくは０になる。

例：$2^2=4$、$0^2=0$、$(-3)^2=9$

２乗すると負の数になるものはあるだろうか？

いま、２乗すると－１になる新しい数を考えて、これを i と表す。i は

$$i^2=-1 \text{、} \quad i=\sqrt{-1}$$

という性質をもつ。i を**虚数単位**と呼ぶ。さらに、実数 a、b と**虚数単位** i によって

$a+bi$ と表わされる数を**複素数**

という。このとき a を実部、b を虚部という。

複素数の例として

$5+3i$、$4+\sqrt{5}i$、$2i$、$2\sqrt{3}$

などがある。複素数は今まで扱ってきた実数を含んでいる。

複素数 $a+bi$ で $b=0$ のとき、$a+0i=a$ となり、実数を表す。$b\neq 0$ である複素数を、虚数という。

＊＊＊

複素数の取り扱い

① $a+bi=c+di$ ならば a=c かつ b=d　　　(複素数の相当)

例題１ $(2x+y)+(3x-2)i=3+4i$

複素数の相当より

$$\begin{cases}2x+y=3\\3x-2=4\end{cases}$$

これを解いて　$x=2,\quad y=-1$

＊＊＊

② $\sqrt{-a}=\sqrt{-1\times a}=\sqrt{-1}\times\sqrt{a}=\sqrt{a}i$

例１

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$$

＊＊＊

③四則演算 $(+,-,\times,\div)$ は $i^2=-1$ とする他は、普通の文字 i として扱う

例１

（１）$(3+2i)+(4-6i)=(3+4)+(2i-6i)=7-4i$

———例えば i を x と置き換えれば———

$(3+2x)+(4-6x)=(3+4)+(2x-6x)=7-4x$

二つを見比べるとiとxが変わっただけである。iは普通の文字のように扱う。

（３）　$(3+2i)(4-6i)=12-18i+8i-12i^2$　　　$\leftarrow$　i^2が出てきたら$i^2=-1$を使う

$=12-18i+8i+12=24-10i$

＊＊＊

$a+bi$と$a-bi$を互いに共役な複素数という。$\alpha=a+bi$とおくと$a-bi$を$\overline{\alpha}$と表わす。

（共役な複素数は虚部の符号を逆にしたものである。）

例　$\alpha=3+2i$、ならば　$\overline{\alpha}=3-2i$

＊＊＊

複素数の除法（分数）は、分母と共役な複素数を掛けることで$a+bi$の形にすることができる。（共役な複素数の積は実数になる）

例２

$$\frac{3+2i}{1-5i}=\frac{(3+2i)}{(1-5i)}\times\frac{(1+5i)}{(1+5i)}$$
$$=\frac{3+15i+2i+10i^2}{1-25i^2}=\frac{3+17i-10}{1+25}$$
$$=\frac{-7+17i}{26}=-\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i$$

＊＊＊

☆負の数の平方根

複素数を利用すれば、負の数の平方根も求められる。

$(\sqrt{3}i)^2=(\sqrt{3})^2i^2=3\cdot(-1)=-3$　　（$\sqrt{3}i$を２乗すると－３になる）

$(-\sqrt{3}i)^2=(-\sqrt{3})^2i^2=3\cdot(-1)=-3$　　（$-\sqrt{3}i$を２乗すると－３になる）

つまり、$\sqrt{3}i$と$-\sqrt{3}i$は－３の平方根である。

④　$-a$の平方根は、$\sqrt{a}i$と$-\sqrt{a}i$である

２　解の公式

２次方程式の$ax^2+bx+c=0$解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

である。これまではルートの中が負の場合（b^2-4ac が負の値の場合）は考えなかった。複素数で i を導入したことにより、ルートの中が負の場合も扱うことができる。

例題２　$2x^2+3x+5=0$ を解の公式を用いて解け。
　解の公式に代入して

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{-31}}{4}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{31}i}{4}$$

←　i を使ってルートの中のマイナスを消す。

＊＊＊

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の b が偶数の時は、$b=2b'$ として
$ax^2+2b'x+c=0$ と書き直すことができる。このとき解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

＊＊＊

☆判別式

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

のルートの中 b^2-4ac を２次方程式の「**判別式**」といい、記号 D で表す。

$$D=b^2-4ac$$

２次方程式の解の判別

２次方程式の判別式 D により、解を３つに判別できる。
（１）$D>0$　⇔　二つの実数解をもつ
（２）$D=0$　⇔　重解をもつ
（３）$D<0$　⇔　２つの虚数解をもつ

$ax^2+2b'x+c=0$ では、解の判別に $\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

＊＊＊

例題３

２次方程式$x^2+kx+4=0$が虚数解をもつような定数kの値の範囲を求めよ。

㊦　この２次方程式の判別式をDとすると

$$D=k^2-4\cdot1\cdot4=k^2-16=(k+4)(k-4)$$

虚数解をもつのは、$D<0$のときである。すなわち

$$(k+4)(k-4)<0$$

よって　　$-4<k<4$

＊＊＊

③ 解と係数の関係

一般に、２次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の２つの解を、解の公式を用いて表すと、$D=b^2-4ac$として

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\quad、\quad\beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

となる。$\alpha+\beta$と$\alpha\beta$は

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

すなわち、２次方程式の解と係数の間には、次の関係が成り立つ

２次方程式$ax^2+bx+c=0$の２つの解をα、βとすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\quad、\quad\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

＊＊＊

例題５

２次方程式$2x^2-4x+3=0$の２つの解をα、βとするとき、

$\alpha^2+\beta^2$、$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$の値をそれぞれ求めよ。

㊦　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{(-4)}{2}=2\quad、\quad\alpha\beta=\frac{3}{2}$$

であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2\div\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$$

＊＊＊

☆２次方程式の因数分解

２次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の２つの解をα、βとすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\quad、\quad\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

よって

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

したがって、次のことが成り立つ。

２次式の因数分解

> ２次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の２つの解をα、βとすれば
> $$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

例題６　次の２次方程式を複素数の範囲で因数分解せよ。

x^2-3x+4

解　$x^2-3x+4=0$を解の公式を用いて解くと

$$x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$$

したがって

$$x^2-3x+4=2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{2}\right)$$

＊＊＊

☆２次方程式の因数分解

２数α、βを解とする２次方程式で、x^2の係数が１のものは

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

すなわち　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

である。

２数を解とする２次方程式

> ２数α、βを解とする２次方程式の１つは
> $$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

例３

２数$\alpha=3+i$、$\beta=3-i$を解とする２次方程式の一つは

$$\alpha+\beta=(3+i)+(3-i)=6$$

$$\alpha\beta=(3+i)(3-i)=10$$

であるから、$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$に代入して、

$$x^2-6x+10=0$$

＊＊＊

例４

和が４、積が５となる２数(複素数の範囲)を求めてみよう。
２数をα、βとすると

$$\alpha+\beta=4、\qquad \alpha\beta=5$$

である。α、βを２次方程式の解と考えれば、$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$より、

$$x^2-4x+5=0$$

の解が求める２数α、βになる。解の公式を使って解くと

$$x=2\pm i$$

したがって、和が４、積が５となる２数は

$$2+i \quad と \quad 2-i$$

である。

補足
２数をx、yとして連立方程式

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=5 \end{cases}$$

を解くことと同じである。

＊＊＊

例題７

２次方程式$x^2-3x+5=0$の２つの解をα、βとするとき、$\alpha+2$、$\beta+2$を解とする２次方程式を一つ求めよ。

$\boxed{解}$ 解と係数の関係より、$\alpha+\beta=3$、$\alpha\beta=5$であるから、
求める２次方程式の解の和は

$$(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4$$
$$=3+4=7$$

積は

$$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$$
$$=5+2\cdot3+4=15$$

よって、求める２次方程式の１つは

$$x^2-7x+15=0$$

解と係数の関係

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad、\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

＊＊＊