１章　方程式・式と証明

１節　整式の除法と分数式

１．整式の除法

整式(多項式)の割り算は、整数の割り算と同じような方法で行うことができる。

例１　$A=2x^2+5x+4$、$B=x+2$ のとき、A を B で割ると次のようになる。

$$
\begin{array}{rl}
 & \phantom{2x^2+{}}2x+1 \quad \longleftarrow \text{商} \\
x+2 \big) \!\!\! & \overline{2x^2+5x+4} \\
 & \underline{2x^2+4x} \quad \text{----------}\ (x+2)\times 2x \\
 & \phantom{2x^2+{}}x+4 \\
 & \phantom{2x^2+{}}\underline{x+2} \quad \text{----------}\ (x+2)\times 1 \\
 & \phantom{2x^2+5x+{}}2 \quad \longleftarrow \text{余り}
\end{array}
$$

最後に現れた２は、割る式 $x+2$ よりも次数が低いので、これ以上は計算を続けることができない。このとき、商は $2x+1$、余りは 2 である。上の割り算から

$A=B\times(2x+1)+2$　　割られる式＝割る式×商＋余り

が成り立つことが分かる。

整式 A を、整式 $B(B\neq 0)$ で割った時の商を Q、余りを R とすると

$$A=BQ+R$$ ただし、R は B より次数の低い整式

が成り立つ。とくに $R=0$ となるとき A は B で割り切れるといい、B は A の因数であるという

＊＊＊

例題１　$A=2x^3+6x^2+3$、$B=2x^2-3$ のとき、A を B で割った商と余りを求めよ。

$$
\begin{array}{rl}
 & \phantom{2x^3+{}}x+3 \\
2x^2\ \boxed{}-3 \big) \!\!\! & \overline{2x^3+6x^2\ \boxed{}+3} \\
 & \underline{2x^3\ \boxed{}\ -3x} \\
 & \phantom{2x^3+{}}6x^2+3x+3 \\
 & \phantom{2x^3+{}}\underline{6x^2\ \boxed{}-9} \\
 & \phantom{2x^3+6x^2+{}}3x+12
\end{array}
\qquad \boxed{} \longleftarrow \text{項がないときは あけておく}
$$

答　商　$x+3$、余り　$3x+12$

整式の除法をする際の注意

１．降べきの順に整理してから計算する。

２．次数がとんでいるとき、すなわち係数が０である項があるときは
　　その場所をあけて書く。

＊＊＊

２．分数式とその計算

$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ のように、$\dfrac{\text{整式}}{\text{１次以上の整式}}$ の形で表される式を**分数式**という。整式と分数式を合わせて**有理式**という。

分数式でも、分数と同じように以下の計算ができる。

A, B, C, D をそれぞれ分数式とすると、以下の計算ができる

①約分

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

それ以上約分できない分数式は、**既約**であるという。

②乗法・除法

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}、\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

③加法・減法

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}、\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

通分

たとえば $\dfrac{2}{xy}$、$\dfrac{x}{y^2}$ は

$$\frac{2}{xy}=\frac{2\times y}{xy\times y}=\frac{2y}{xy^2}、\qquad \frac{x}{y^2}=\frac{x\times x}{y^2\times x}=\frac{x^2}{xy^2}$$

のように、分母が同じ分数式に直すことができる。このように、いくつかの分数式の分母を同じにすることを**通分**するという。

＊＊＊