目次

ネット教材

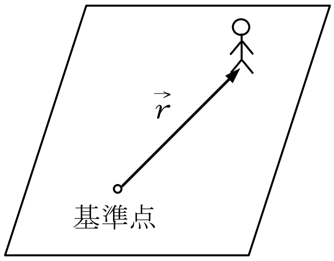
第Ⅰ章　力と運動

第１節　物体の運動

①. 平面の運動

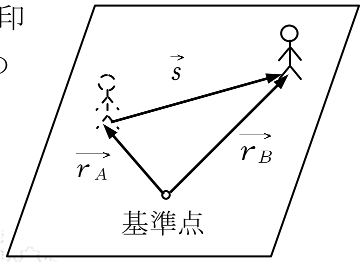
1　平面状の運動とベクトル

○位置ベクトル



平面上を動く物体の位置は、基準となる点を定めれば、「　**ベクトル**　」として表すことができる。基準となる点（原点）から物体の位置まで引いた矢印を「　**位置ベクトル**　」という。ベクトルは記号$\vec{r}$のように表す。位置ベクトルも通常のベクトルと同様、和・差・スカラー倍の演算を行うことができる。

○変位



物体が移動したとき、移動する前の位置から移動した後の位置へ引いた矢印を「　**変位**　」もしくは「　**変位ベクトル**　」という。移動する前の位置ベクトルを$\overrightarrow{r_A}$、移動した後の位置ベクトルを$\overrightarrow{r_B}$とすれば、変位$\vec{s}$は

$$\boxed{\vec{s}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}}$$

と表すことができる。

○平面運動の速度

物体が点Ａから点Ｂまで移動したとき、各点の位置ベクトルを$\overrightarrow{r_A}$、$\overrightarrow{r_B}$とすると変位は

$$\varDelta\vec{r}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}$$

と表される。移動するのに時間$\varDelta t$だけかかったとすると

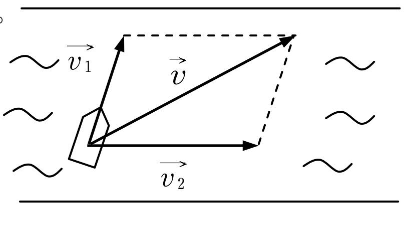
$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

を「　**平均の速度**　」という。また、$\varDelta t$を極めて小さくしたときは単に「　**速度**　」という。

ネット教材

2　速度の合成

○速度の合成



平面上を移動する物体の速度は「　**ベクトル**　」で表すことができる。今、川の上を船が移動しているとする。船は川の水に対して速度$\overrightarrow{v_1}$で移動している。川の水が岸に対して速度$\overrightarrow{v_2}$で流れているとき、岸に対する船の速度$\vec{v}$は

$$\boxed{\vec{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}$$

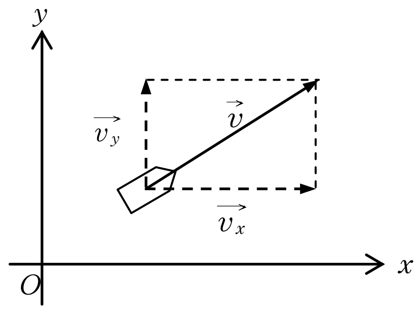
となる。この速度$\vec{v}$を$\overrightarrow{v_1}$と$\overrightarrow{v_2}$の「　**合成速度**　」という。また、合成速度を求めることを「　**速度の合成**　」という。

○速度の分解

速度の合成とは逆に、１つの速度を２つの速度に分けることもできる。これを「　**速度の分解**　」という。いま、平面上を物体が$\vec{v}$で移動している。平面上に互いに直角な軸、x軸、y軸を置くと、$\vec{v}$はx軸に平行な成分v_xとy軸に平行な成分v_yに分けることができる。v_xとv_yは、$\vec{v}$とx軸がなす角θによって、

$$v_x = v\cos\theta$$

$$v_y = v\sin\theta$$

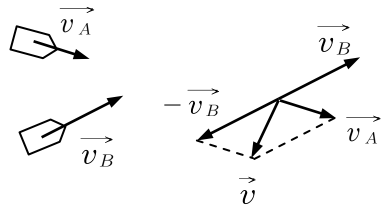


のように求められる。

＊＊＊

3　相対速度

速度$\vec{v}$で動いている電車のから外の景色を見ると$-\vec{v}$で動いているように見える。物体A、Bがそれぞれ$\vec{v_A}$、$\vec{v_B}$で運動するとき、Bから見たAの速度を$\vec{v}$とすると



$$\vec{v} = \vec{v_A} - \vec{v_B}$$

となる。この$\vec{v}$をBに対するAの「　**相対速度**　」という。

＊＊＊

4　平面運動の加速度

運動している物体が点Aを通った後、点Bを通過した。点A、Bでの速度をそれぞれ$\vec{v_A}$、$\vec{v_B}$とする。点Aから点Bまで移動するのに時間Δtだけかかったとすると

$$\frac{\vec{v_B} - \vec{v_A}}{\Delta t}$$

を平均の加速度という。Δtを極めて小さくしたときは単に「　**加速度**　」という。

ネット教材

②. 落下運動

1　自由落下

加速度をもつ物体の運動は

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

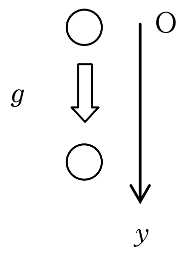
で求めることができた。

いま、静止している物体が重力だけを受けて落下する場合を考える。ただし、空気抵抗は無視できるとする。この運動を「　**自由落下**　」という。

鉛直方向の座標をyとし、下方向を正とする。最初の位置を原点とすると、初速度が０、で加速度がg（重力加速度）の運動だから、速度と位置は

$$v = gt$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$



となる。

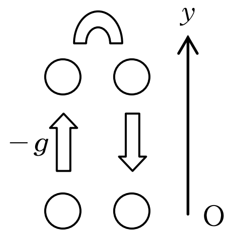
2　鉛直投げ上げ

物体を初速度v_0で鉛直上向きに投げる運動を考える。鉛直方向の座標をyとし、上方向を正とする。

初速度v_0、加速度$-g$であるから、最初の位置を原点とすると

$$v = v_0 - gt$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$



3　水平投射

水平方向に投げ出された物体（小球）の運動を考える。小球の最初の位置を原点とし、初速度の向きにx軸をとり、鉛直下方向にy軸をとる。速度、加速度（力）は共に「　**ベクトル**　」であるので、水平方向と垂直方向に分解することができる。つまり、水平・垂直両方の方程式を作ればよい。

初速度をv_0とすると、水平方向には加速度が働かないため、水平方向の速度v_xは

$$v_x = v_0$$

となり、水平方向へ「　**等速度運動**　」している。鉛直方向は初速度０、加速度gなので鉛直方向の速度v_yは、時刻tとして

$$v_y = gt$$

となり、鉛直方向は「　**等加速度運動**　」（自由落下）となる。

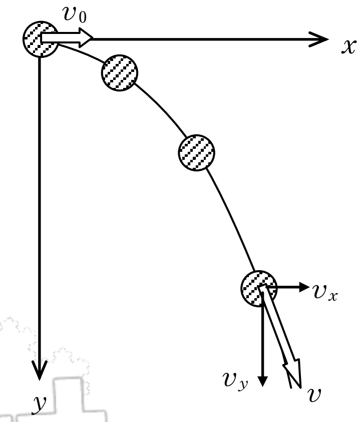
小球の速度（合成速度）vは

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

である。位置(x, y)はそれぞれ

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$



である。小球の軌跡は放物線になるので、このような運動を「　**放物運動**　」という。

＊＊＊

ネット教材

4　斜方投射

ハンドボール投げやソフトボール投げのように、斜め上方に投げ出された物体の運動を考えよう。初速度v_0で水平と角θをなす方向に投げ出された小球を考える。小球の最初の位置を原点とし、初速度の水平向きにx軸をとり、鉛直上方向にy軸をとる。x軸方向、y軸方向の小球の速度をv_x、v_yとすると、時刻tを用いて

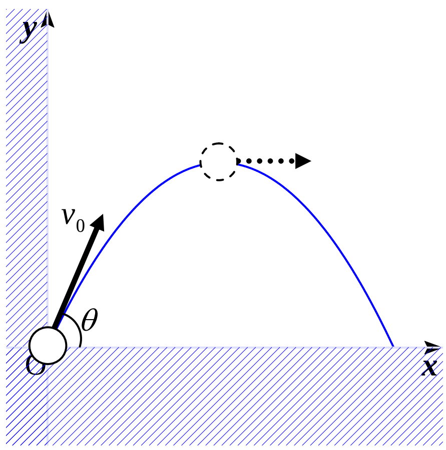
$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

となる。位置(x, y)は

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$



となる。この２式からtを消去するとyはxの２次関数となる。すなわち、物体の軌道は放物線を描く。
＊＊＊

5　放物運動と運動方程式

水平投射や斜方投射などの放物運動（投射）について、運動方程式を調べてみよう。運動方程式は

$$m\vec{a}=\vec{F}$$

であった。加速度、力を水平なx軸方向、鉛直なy軸方向の成分に分けると

$$ma_x=F_x \qquad ma_y=F_y$$

となる。物体が受けている力は重力のみであり、向きはy軸方向である。よって、運動方程式は

$$\boxed{\begin{aligned} ma_x&=0 \\ ma_y&=mg \end{aligned}}$$

となり、

$$a_x=0 \qquad a_y=g$$

である。

③. 運動量と力積

1　運動量

物体が運動しているとき、その物体の「　**質量**　」や「　**速度**　」が大きいと、他の物体にぶつかったときに大きな衝撃を与えることができる。物体の勢いを表す量として、質量mと速度$\vec{v}$をかけたもの

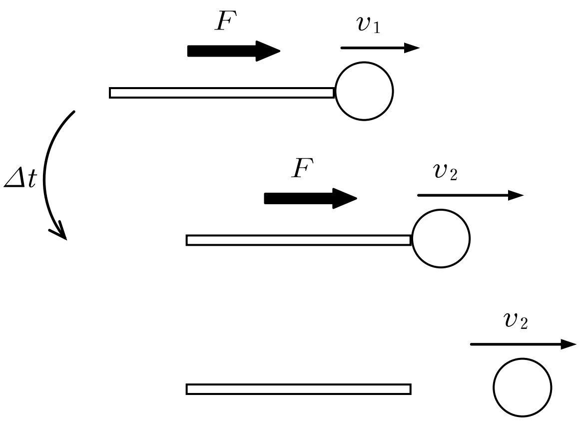
$$\boxed{m\vec{v}}$$

を「　**運動量**　」という。単位は「　kg•m/s　」である。

ネット教材

2　運動量の変化と力積

一直線上を質量mの物体がv_1で運動している。いま、運動と同じ向きに力Fを時間Δtだけ受けて、速度がv_2へ変化した。このときの物体の加速度は



$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}$$

となる。これを運動方程式$ma=F$に代入すると

$$m\cdot\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=F$$

この式を整理すると

$$\boxed{mv_2-mv_1=F\Delta t}$$

となる。力と、力を受けた時間Δtの積を「　**力積**　」という。上の式より、物体の「　**運動量**　」の変化は力積に等しい。これは、平面上（空間上）でもなりたつので、ベクトルを用いて次のように表される。

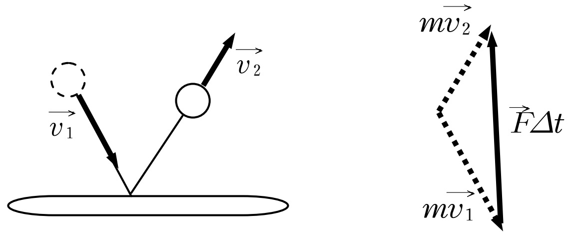
$$\boxed{m\vec{v_2}-m\vec{v_1}=\vec{F}\Delta t}$$

○力が変化する場合の力積

　バットでボールを打ったような場合を考える。ボールがバットに当たっている間（Δt）に、ボールがバットから受ける力は「　**一定ではない**　　」。ボールが受けた（全）力積をPとすると、

$$\overline{F}=\frac{P}{\Delta t}$$

をボールの受けた平均の力という。



＊＊＊

④. 運動量の保存

1　直線上の衝突と運動量の保存

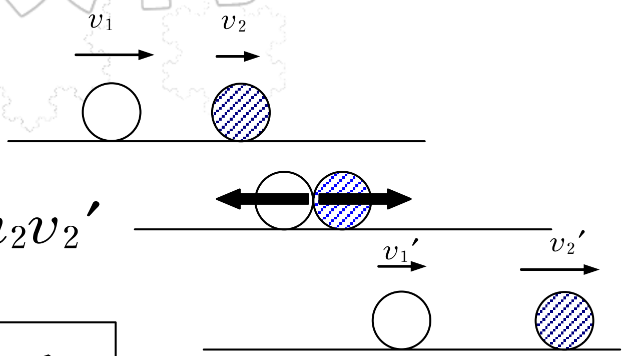
　直線上で２つの物体が衝突する場合を考える。物体ＡとＢがあり、今、同じ直線上を運動していて

	物体Ａ	物体Ｂ
質量	m_1	m_2
速度	v_1	v_2

$v_1 > v_2$

である。この後、ＡとＢは衝突し、速度はそれぞれ$v_1{}'$、$v_2{}'$へ変化した。衝突のとき接触している時間をΔt、Ｂが受ける平均の力を$\overline{F}$とする。Ａが受ける平均の力は$-\overline{F}$である（作用・反作用の法則）。Ａ、Ｂそれぞれに力積の式をあてはめると、

$$-\overline{F}\Delta t = mv_1{}' - mv_1$$
$$\overline{F}\Delta t = mv_2{}' - mv_2$$



となる。この２式を足すと（両辺足すと）、

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1{}' + m_2v_2{}'$$

となる。この式は

衝突前の運動量の和＝衝突後の運動量の和

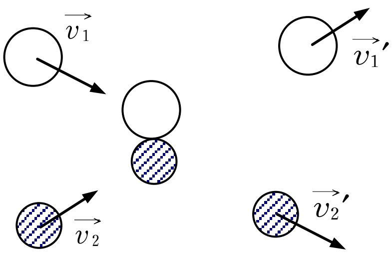
であり、力を及ぼし合う物体間の運動量の和は変わらないことを示す。

＊＊＊

2　平面上の衝突

　平面上を運動する２つの物体が衝突するときも、運動量保存の法則が成り立つ。

	物体Ａ	物体Ｂ
質量	m_1	m_2
速度（衝突前）	$\vec{v_1}$	$\vec{v_2}$
速度（衝突後）	$\vec{v_1}'$	$\vec{v_2}'$



とすると、

$$m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}=m_1\overrightarrow{v_1}'+m_2\overrightarrow{v_2}'$$

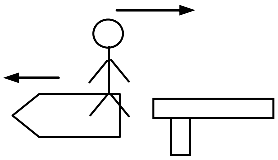
が成り立つ。この式は２軸ｘ、ｙ成分に分けると

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=m_1v_{1x}'+m_2v_{2x}'$$
$$m_1v_{1y}+m_2v_{2y}=m_1v_{1y}'+m_2v_{2y}'$$

となる。

＊＊＊

3　分裂する物体



　ボートに乗っている人が岸に飛び移るとき、ボートは「　**反作用**　」で後ろに動き出す。ボートに乗っているとき、ボートと人は一体であると見ることができる。人が岸に飛び移るときに、ボートと人が分裂すると考えることができる。

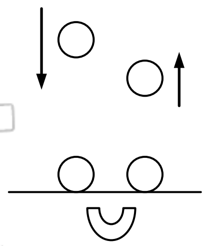
　このように物体が分裂する場合にも「　**運動量**　」は保存する。質量mで速度vの物体が、質量m_1とm_2の２つに分裂するとき

$$m\vec{v}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}$$

が成り立つ。

＊＊＊

4　はねかえり係数



　ボールを床に落とすと、床ではねかえるが、はねかえる度合いはボールや床の材質などに似よって違う。はねかえり前のボール速度vと後の速度v'を用いると、はねかえりの度合いを

$$e=\left|\frac{v}{v'}\right|=-\frac{v}{v'}$$

で表すことができる。このeを「　**はねかえり係数**　」という。

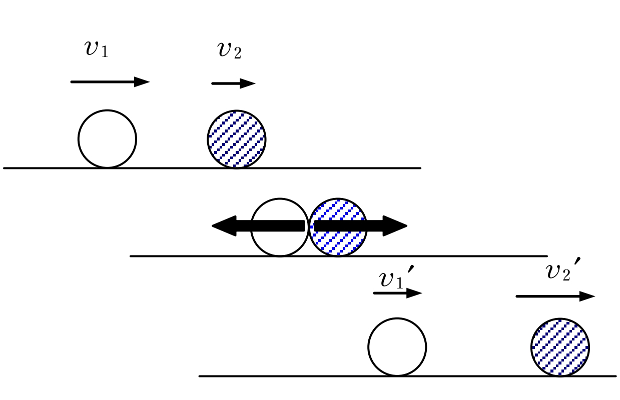
　運動している物体Ａ、Ｂが衝突するときの、はねかえりの係数は、

	物体Ａ	物体Ｂ
速度（衝突前）	v_1	v_2
速度（衝突後）	v_1'	v_2'

$v_1>v_2$

とすると、衝突前のＡ、Ｂが近づく速さ$|v_1-v_2|$、衝突後のＡ、Ｂが遠ざかる速さ$|v_1'-v_2'|$を用いて

$$e=\left|\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}\right|=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$$



である。eはどのようなときも$0\leqq e\leqq 1$の範囲内にあるが、

　　$e=1$　のとき　「　**弾性衝突**　」

　　$0\leqq e<1$　のとき　「　**非弾性衝突**　」

と呼び、特に

　　$e=0$　のとき　「　**完全非弾性衝突**　」

という。

＊＊＊

5　斜めの衝突とはねかえり係数

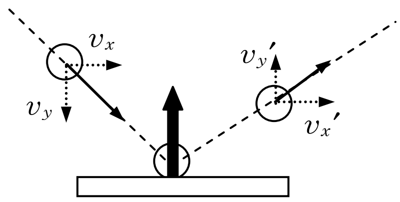
ネット教材

小球が壁に斜めにぶつかってはねかえる場合を考える。壁と水平にx軸、垂直にy軸をとる。

速度（衝突前）	v_x	v_y
速度（衝突後）	v_x'	v_y'

とすると、壁面が「　**なめらか**　」である場合、小球が壁から受ける力は壁と垂直である。よって、x軸方向の速度は変化しない

$$\boxed{v_x' = v_x}$$



壁のはねかえり係数をeとすれば

$$\boxed{v_y' = -ev_y}$$

$$e = -\frac{v_y'}{v_y}$$

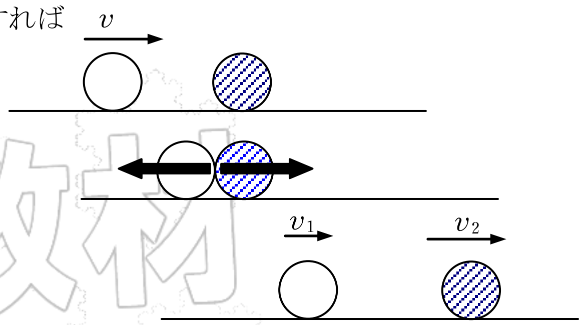
である。

＊＊＊

6　衝突と力学的エネルギー

物体と物体が衝突するとき、必ず運動量は「　**保存**　」される。では、力学的エネルギーはどうだろうか？

質量mの物体Ａ、Ｂがある。静止している物体Ｂに、物体Ａが速度vで衝突する。衝突後の物体Ａ、Ｂの速度をそれぞれv_1、v_2とすると、はねかえり係数をeとすれば



$$mv = mv_1 + mv_2$$

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{v - 0}$$

が成り立つ。この２式から

$$v_1 = \frac{1-e}{2}v、\quad v_2 = \frac{1+e}{2}v$$

が得られる。衝突による力学的エネルギー（この場合は運動エネルギーのみ）の変化ΔEは

$$\Delta E = \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}mv_2{}^2\right)}_{衝突前} - \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{衝突後}$$

であるから。v_1、v_2の式を代入して整理すると

$$\Delta E = -\frac{1}{4}mv^2(1-e^2)$$

となる。つまり、力学的エネルギーの変化はeの値によって

$$\begin{cases} e=1 \quad のとき \quad \Delta E=0、すなわち力学的エネルギーは保存する。\\ 0 \leqq e < 1 \quad のとき \quad \Delta E<0、力学的エネルギーは減少する。\end{cases}$$

となる。衝突では、ほとんどの場合力学的エネルギーは「　**保存しない**　」。

ネット教材

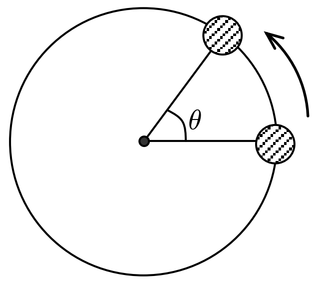
第２節　円運動と単振動

①. 円運動

1　等速円運動の速度と角速度

観覧車のように円周上を一定の速さで動く運動を「　**等速円運動**　」という。

○角速度



等速円運動する物体が、1秒間に回転する角度（中心から見て）を「　**角速度**　」という。角度の単位にラジアン[rad]を用いると、角速度の単位はラジアン毎秒[rad/s]となる。

角速度ω[rad/s]と、t[s]間に回転した角度θ[rad]の間には

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad \theta = \omega t$$

が成り立つ。

○周期と回転数

物体が円周を1回転するのにかかる時間を「　**周期**　」という。1回転は2π[rad]の回転なので、角速度ω[rad/s]と周期T[s]には

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

が成り立つ。また1秒間あたりの回転数をn[s^{-1}]とすると

$$n = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{n}$$

であるから、

$$\omega = 2\pi n$$

となる。

ネット教材

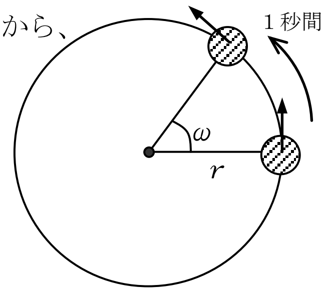
○速度

半径r[m]の円周上を角速度ω[rad/s]で等速円運動する物体の速度v[m/s]は、弧度法の性質より

$$v = r\omega$$

1秒間に進む距離＝（半径）×（1秒間の回転角）

となる。速度は常に円の「　　　　　　」である。ここで、$\omega = \frac{2\pi}{T}$であるから、



$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

一周($2\pi r$)するのにTだけかかる。

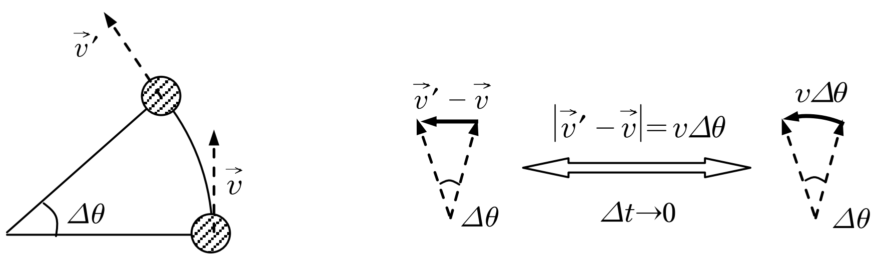
が成り立つ。

＊＊＊

2　等速円運動の加速度

等速円運動をしている物体は、速度が一定でも、速度の向きが絶えず変化しているので、「　**加速度運動**　」である。

いま、物体が時間Δtで$\Delta\theta$だけ回転したとする。



物体はΔtの間に$\vec{v}$から$\vec{v}'$に変わるとすると、加速度は

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}'-\vec{v}}{\Delta t}$$

である。いま、$|\vec{v}'-\vec{v}|$は、Δtを0に近づけたとき、$\vec{v}$と$\vec{v}'$を半径とした円弧$v\Delta\theta$と一致する（逆に言えば$\Delta t\to 0$とすると、$v\Delta\theta$は$|\vec{v}'-\vec{v}|$に限りなく近づく）。よって、$|\vec{v}'-\vec{v}|=v\Delta\theta$であるから、

$$a=\frac{v\Delta\theta}{\Delta t}=vw \qquad \omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

となる。$v=r\omega$より、

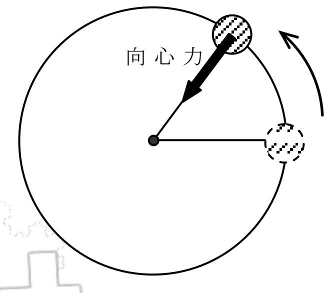
$$\boxed{a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}}$$

となる。$\vec{a}$の向きは、常に円の「　**中心向き**　」である。

＊＊＊

3　向心力

円運動をしている物体は、円の中心向きに加速度を持っている。$m\vec{a}=\vec{F}$であるから、物体は円の「　**中心向き**　」に力を受けている。この力を「　**向心力**　」という。



質量m[kg]の物体が半径r[m]、速さv[m/s]で等速円運動しているとき、物体が受ける向心力F[N]は$ma=F$より、

$$\boxed{F=mr\omega^2=m\frac{v^2}{r}}$$

となる。向心力となる力は、重力や張力など様々な場合がある。

ネット教材

＊＊＊

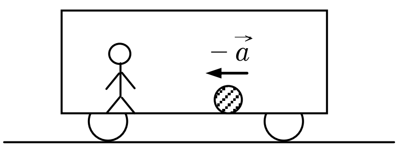
4　慣性力

電車に乗っていて、電車が発車したり停車したりするとき、前後に力を受けたかのように感じる。しかし、これは電車が動いているだけで、本人は動いていないから感じるのである。このように、「　**加速度運動**　」している観測者に現れる力を「　**慣性力**　」という。

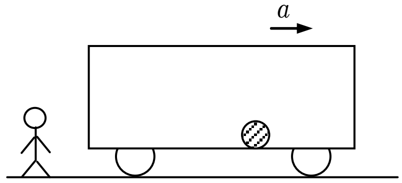
電車の床に質量mのボールがあり、電車が加速度$\vec{a}$で動き出したときを考える。電車に乗っている人から見ればボールは力

$$\vec{F}=-m\vec{a}$$

を受け動き出したように見える。電車の外の人からはボールは止まって見える。



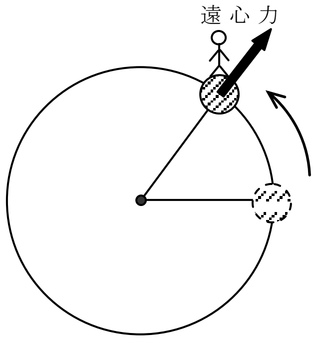
ボールが動くように見える



電車が動いて、ボールは止まっているように見える

＊＊＊

5 遠心力



観測者が円運動をするとき、観測者は円の外側に向いた力を感じる。この力を「 **遠心力** 」という。遠心力は円運動の加速度による「 **慣性力** 」である。

「 **遠心力** 」は「 **向心力** 」を受けていないと見たときの慣性力であるから、遠心力は向心力と「 **同じ** 」大きさで、向きは「 **逆** 」（つまり円の中心へ反対向き）である。よって、遠心力F[N] は、質量m[kg] の物体が半径r[m] 、速さv[m/s] 、角速度ω[rad/s] より、

$$F=mr\omega^2=m\frac{v^2}{r}$$

となる。

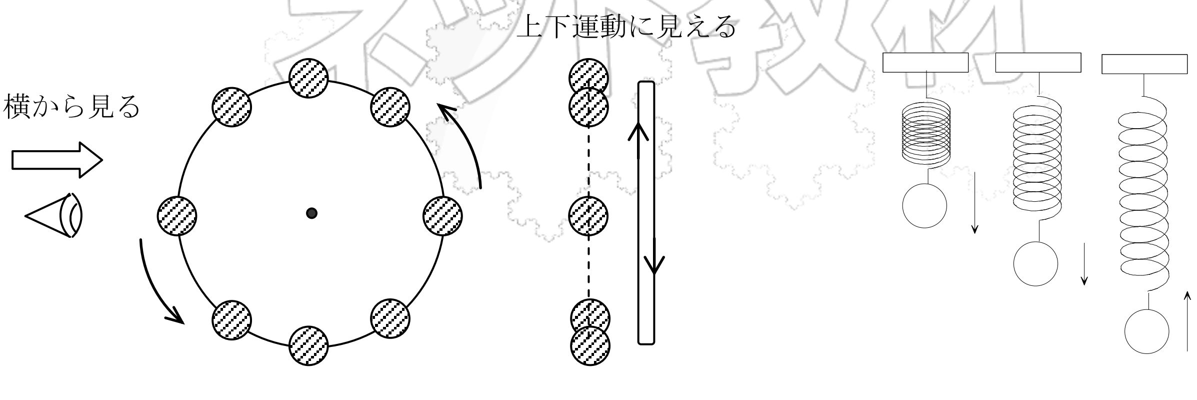
＊＊＊

②. 単振動

1 単振動と等速円運動

等速円運動している物体を真横から見ると、物体は上下運動を繰り返しているように見える。等速円運動をしている物体の座標のうち、１つの軸方向の座標を取り出した（正射影という）運動を「 **単振動** 」という。ばねに吊るされた重りが、持ち上げられて離すと起きる上下振動も単振動の１つである。

ネット教材



半径A、角速度ω で等速円運動する物体を、x 軸へ正射影する。座標x は時刻をt として、

$$x=A\sin\omega t$$

となる。単振動において、A[m] を「 **振幅** 」、ω[rad/s] を「 **角振動数** 」、ωt[rad] を「 **位相** 」という。また、１回振動するのにかかる時間T[s] を「 **周期** 」といい、１秒間に振動する回数f[Hz] を「 **振動数** 」という。ω、T、f の間には、等速円運動と同様に

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

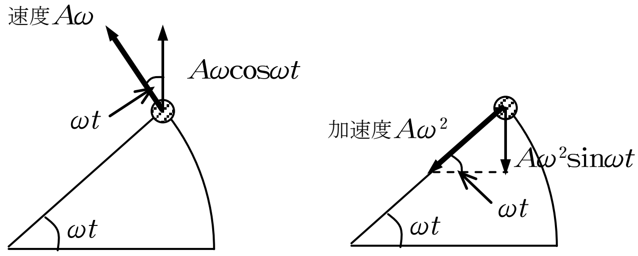
が成り立つ。

＊＊＊

2　単振動の速度・加速度と復元力

単振動する物体の速度と加速度を求めてみよう。単振動は等速円運動をx軸に正射影したものであるから、速度・加速度は等速円運動の値のx軸成分になる。いま、単振動する物体の位置xを

$$x = A\sin\omega t$$



と表すと、時刻tでの速度vは

$$\boxed{v = A\omega\cos\omega t}$$

となる。同様に加速度aは

$$\boxed{a = -A\omega^2\sin\omega t}$$

である（向きに注意）。また、aはxを用いて表すと

$$\boxed{a = -\omega^2 x}$$

となる。

○復元力

単振動する物体は、加速度をもっているため、力がはたらいている。質量mの物体にはたらく力Fは$F = ma$より

$$\boxed{F = -m\omega^2 x}$$

となる。ここで、$m\omega^2$は正の定数なので、新しい定数$K = m\omega^2$としてまとめると

$$F = -Kx$$

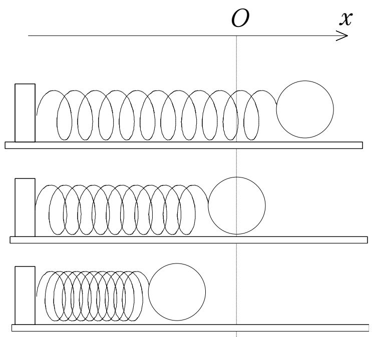
となる。つまり単振動する物体は、振動の中心からの変位xに「　**比例**　」する力を受けている。力の向きは常に振動の中心を向いているので、この力を「　**復元力**　」という。ばねの単振動の場合、Kはばね定数にあたる。

＊＊＊

3　ばね振り子

ばねの端におもりをつけて、振動させるものを「　**ばね振り子**　」という。この性質を調べてみよう。

なめらかな床にばねを置き、片方の端を固定し、もう片方の端におもりをつける。おもりを距離Aだけひっぱり、離すとおもりは振幅Aの単振動をする。



いま、振動の方向にx軸をとり、振動の中心（ばねの自然の長さ）に原点を取る。おもりはばねの弾性力$-kx$（kはばね定数）を受け、これが振動の復元力となる。単振動の復元力は$F = -m\omega^2 x$であり、ばねの弾性力は$F = -kx$であるから

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

よって、単振動の周期は

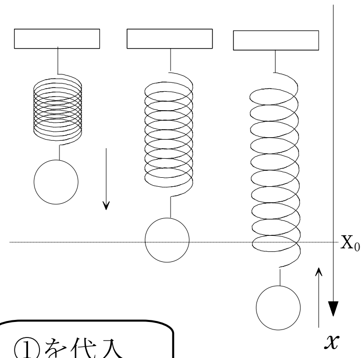
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

である。つまり、周期は振幅によらない（振幅を変えても周期は同じ）。

ネット教材

☆鉛直ばね振り子

鉛直方向に振動するばね振り子の運動を考える。ばね定数kのばねに質量mのおもりをつるす。おもりが静止した時の、ばねの伸びをx_0とする。このとき、重力とばねの弾性力はつり合っており、鉛直下向きを正とすると、



$$mg-kx_0=0 \quad \cdots ①$$

が成り立つ。つり合いの位置からおもりを下に引いて離すと、おもりは振動をする。つり合いの位置からの変位をxとすると、おもりが受ける力は、

$$F=mg-k(x_0+x)=-kx$$

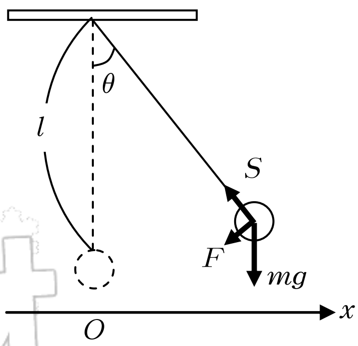
①を代入

よって、おもりは単振動をする。振幅は最初にひいた長さとなる。

＊＊＊

4 単振り子

右図のように糸でおもりをつるし、横に引いて離すと、おもりは平面上を往復する。この振り子を「 **単振り子** 」という。



おもりの質量をmとすると、おもりが受ける力は、重力mgと糸の張力（Sとする）である。おもりは重力と張力の合力によって運動する。糸と鉛直方向のなす角をθとすると、おもりが運動方向に受ける力は$-mg\sin\theta$である。水平方向の変位をxとし、つり合いの位置を原点とする。糸の長さをlとすれば

$$\sin\theta=\frac{x}{l}$$

運動方向は糸と垂直

であるから、運動方向に受ける力Fは

$$F=-mg\sin\theta=-mg\frac{x}{l}$$

となる。いま、θが小さいとすると、おもりは水平に振動していると考えてよい。このとき

$$F=-mg\frac{x}{l}$$

が復元力となる。これはばね振り子で

$$k=\frac{mg}{l}$$

とした場合と同じである。よって、単振り子の周期Tは

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる。この式から、単振り子の周期はおもりの質量や振幅によらず、糸の長さだけできまる。これを「 **振り子の等時性** 」という。ただし、θが小さいときだけである。

＊＊＊

5 単振動のエネルギー

ネット教材

単振動する物体は運動エネルギーと、ばねの弾性力による位置エネルギーをもつ。運動エネルギーE_Kは、

$$E_K=\frac{1}{2}mv^2$$

また、単振動では$v=A\omega\cos\omega t$であるから、

$$E_K=\frac{1}{2}m(A\omega\cos\omega t)^2$$

位置エネルギーE_Pは

$$\boxed{E_P=\frac{1}{2}kx^2}$$

暗記項目

である。単振動では$x=A\sin\omega t$であるから、

$$E_P=\frac{1}{2}k(A\sin\omega t)^2$$

単振動の全エネルギーEは

$$E=E_K+E_P=\frac{1}{2}m(A\omega\cos\omega t)^2+\frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t$$

この式に、$m\omega^2=k$を用いると

$$\boxed{E=\frac{1}{2}(kA^2\cos\omega t+kA^2\sin^2\omega t)=\frac{1}{2}kA^2}$$

また、$k=m\omega^2$、$\omega=2\pi f$を用いると

$$\boxed{E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m(2\pi f)^2A^2=2\pi^2mf^2A^2}$$

よって、単振動のエネルギーは常に一定であり、振幅の２乗、振動数の２乗に比例する。

＊＊＊

ネット教材

③. 万有引力による運動

1　ケプラーの法則

ケプラーは惑星の運動について次の三つの法則を発見した。

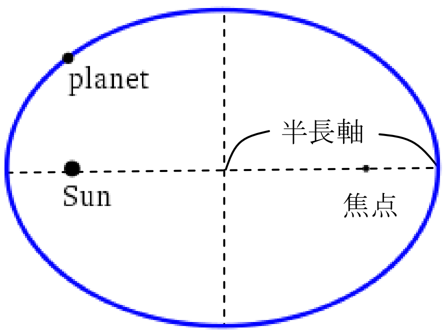
第１法則　惑星は太陽を１つの焦点とする楕円軌道を描く

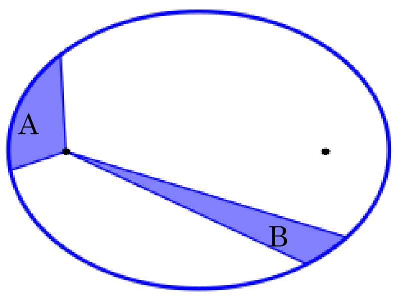
第２法則　惑星と太陽を結ぶ線分が、一定時間に描く面積は一定である

第３法則　惑星の公転周期Tの２乗は、楕円軌道の半長軸aの３乗に比例する

$$T^2=ka^3 \qquad (k\text{は比例定数})$$

この３つの法則を、「　　**ケプラーの法則**　　」という。





第２法則　A=B

＊＊＊

2　万有引力の法則

ニュートンは惑星の運動から、質量をもつすべての物体の間に引力が働いていると考えた。その後、質量m_1と質量m_2の 2 物体間に働く力Fは、物体間の距離をrとして

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

であることが分かった。これを「　　万有引力　　」という。G は「　　万有引力定数　　」であり、実験によって

$$G=6.67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}]$$

であることが求められた。

＊＊＊

3　万有引力と重力

今まで、地表での重力はmgとしてきた。重力は万有引力による力と考えてよい。地球と物体の質量をM、mとし、地球の半径をRとすると

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}$$

が成り立つ、よって

$$g=\frac{GM}{R^2}$$

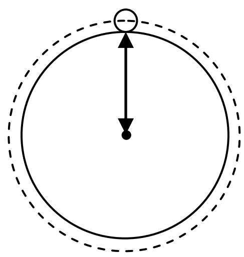
となる。

☆第 1 宇宙速度

地表近くで、水平に速さvで打ち出された物体が地表に沿って等速円運動するとき、vを求めてみよう。物体は万有引力、

$$F=G\frac{Mm}{R^2}$$

を受けている。これが等速円運動の向心力になるから



$$m\frac{v^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}$$

よって

$$v=\sqrt{gR}$$

となる。

4　万有引力による位置エネルギー

地表近くでの重力による位置エネルギーはmghで与えられた。これは地表付近では重力が変化しないと考えた場合である。地表から離れると重力（万有引力）は距離の 2 乗に反比例して減少する。地球の中心から距離rにある質量mの物体を無限遠に運ぶことを考える。運ぶのに要する仕事Wは

$$W=G\frac{Mm}{r}$$

無限遠≒引力がほとんど働かない遠い位置

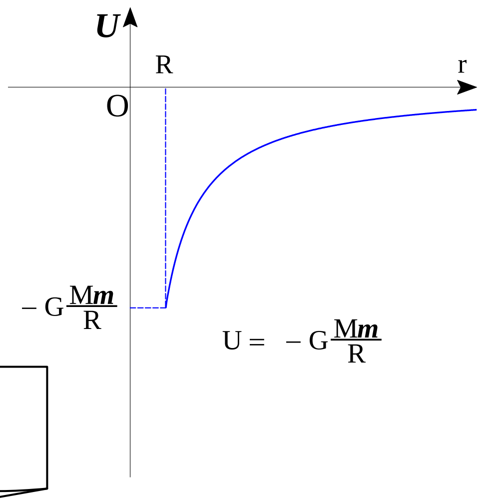
となることが知られている。位置エネルギーは基準点を決める必要があった。万有引力による位置エネルギーは一般に、無限遠を基準点（エネルギー0）に選ぶ。

ネット教材

距離rにある物体は基準点からWだけ位置エネルギーが少ないから、万有引力の位置エネルギーUは

$$\boxed{U=-G\frac{Mm}{r}}$$

で与えられる。



物体が万有引力のみを受けて運動するとき、力学的エネルギー保存の法則

$$\boxed{E=\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{r}\right)=一定}$$

が成り立つ。これは地表から離れた場合にも適用できる法則である。

☆第２宇宙速度

地表から真上に物体を打ち上げたとき、物体が地表にもどってこないようにするには、初速度をいくら以上にすればよいだろうか？

地表から速度v_0で質量mの物体を打ち上げたとする。地球の中心からの距離をrとし、地球の半径をRとすると、力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)=\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$$

となる。無限遠では$r\to\infty$となるから

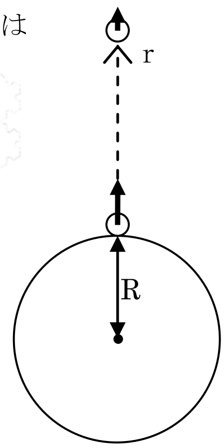
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)=\frac{1}{2}mv^2$$

物体が地表に戻ってこないためには、無限遠で$v\geqq 0$であればよい。すなわち右辺は

$$\frac{1}{2}mv^2\geqq 0$$

である。よって左辺も

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)\geqq 0$$



これを解いて

$$\boxed{v_0\geqq\sqrt{2gR}}$$

となる。

＊＊＊

ネット教材